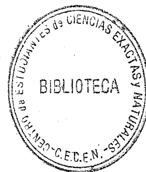
Queda hecho el depósito que marca la Ley 11.723

Agüero 2260. Tel. 805-5485/5320/8333/8434 (1425) Buenos Aires
Cuarta Edición: Año 1991



Cálculo diferencial e integral

RICARDO J. NORIEGA

PROFESOR EN EL DEPARTAMENTO
DE MATEMATICA DE LA UNIVERSIDAD
DE BUENOS AIRES

EDITORIAL
DOCENCIA S.A.
Buenos Aires





PROLOGO DEL AUTOR

La mayoría de los textos sobre Cálculo Diferencial e Integral caen en una de estas dos categorías: la de aquellas que buscan transmitir al lector pericia en las operaciones propias del Cálculo (paso al límite, derivación, integración) y la de aquellos que ponen el acento en el rigor de las deducciones y en los aspectos conceptuales. Ha sido mi intención conseguir con este libro inducir en el lector la mencionada pericia, sin sacrificar para ello lo que es, sin duda, uno de los aspectos distintivos de la matemática: la demostración frente al argumento, el razonamiento frente al seudo razonamiento. Desde luego, ello implica un doble trabajo que tiene para el que escribe como para el que estudia, pero es un trabajo que tiene en el mejor entendimiento del tema su recompensa, tanto para el que está interesado en las aplicaciones del Cálculo como para el que desee introducirse en las matemáticas superiores.

Este libro está basado en los cursos que he dado en los últimos años en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, cursos que plantean la doble necesidad mencionada, ya que son tomados por matemáticos así como por estudiantes de otras ciencias, para los cuales el Cálculo es más una futura herramienta que un objeto de estudio en sí mismo.

Existe un excelente método para no aprender nunca matemáticas, y es el de esquivar las dificultades cada vez que ellas aparezcan. Por eso le aconsejo al lector que entre de lleno en ellas y que no olvide nunca la importancia que en el estudio de las matemáticas tiene el "mirar fijo": si algo no se entiende bien, o no se entiende para nada, detenerse en ese párrafo y pensar intensamente mientras se lo relee una y otra vez, permite siempre llegar a un punto crítico en donde la cosa se hace clara, y en donde lo que ya no se entiende es porque antes no se entendía. Porqué y cómo sucede esto, es uno más de tantos misterios, pero que sucede, sucede. Y sobre todo, no desanimarse por los tropiezos; si no los hubiera, entonces no estaría aprendiendo nada con esta lectura.

He hecho abundante uso al escribir este libro de las excelentes notas del Dr. Enzo Gentile y del Lic. Fernando Carugno basadas en cursos anteriores de Cálculo dictados en la Facultad de Ciencias Exactas, y quiero agradecerles sinceramente su impensada colaboración. Particularmente el ejemplo del curso dado por el Dr. Gentile me ha hecho ver la posibilidad de tomar el toro por las astas y tratar la potencia de exponente real con todo detalle y rigor al comienzo del libro, sin esperar para ello a tener la noción de integral.

Hay más personas a quienes quiero agradecer. Al Dr. Norberto Fava, por la cantidad de consejos y observaciones sobre cómo y qué escribir en este libro. Al Ingeniero Roque Scarfiello, por su constante hincapié en las necesidades de los lectores no matemáticos que ha influido en el contenido y lenguaje de varios capítulos. Al Dr. Manuel Balanzat, por haberme facilitado generosamente los manuscritos de su propio texto sobre el tema, pronto a ser publicado. Al Prof. Juan Carlos Dalmasso, y a través de él a la gente del Centro de Investigación y Acción Educativa, CINAE, por haberme dado la oportunidad de escribir este libro. A María Angélica Tancredi y a Silvia López, por haber convertido en copias legibles mis confusos manuscritos. Y a mi mujer, sin cuyo estímulo constante jamás hubiera completado esta tarea.

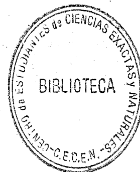
PROLOGO A LA SEGUNDA EDICION

Para esta reedición, que me llena de satisfacción, deseo añadir agradecimientos especiales a Eugenio Gómez, del CINAE, por su energía editorial, y a los alumnos que han usado los anteriores ejemplares, por la cálida recepción que les brindaron.

Quizás esta última se deba a que en el esfuerzo que he hecho por ser entendido se transparenta el afecto que me han despertado las sucesivas camadas estudiantiles con su alegre disposición para el esfuerzo intelectual en común, que eso y no otra cosa es lo que debe ser una clase.

Ricardo J. Noriega
Buenos Aires, Agosto de 1987

CAPITULO I



Los Números Reales

1.1.

PROPIEDADES BASICAS Y PROPIEDADES DERIVADAS

En el presente capítulo vamos a mostrar que tiene sentido la pregunta: ¿cuáles son las propiedades de los números reales? Si se le formula esta pregunta al lector, probablemente evocará los diversos tomos que habrá estudiado de Matemática, pensará en los que le falta por estudiar y concluirá que es imposible dar una respuesta; son tántas las propiedades conocidas de los números reales, por no hablar de las que no se conocen, que la idea de enumerarlas le parecerá poco sensata. Sin embargo, un leve vistazo a la situación puede hacerle cambiar de idea.

Consideremos unas pocas propiedades, por ejemplo:

★ 1. La suma de números reales es conmutativa: $a + b = b + a$ cualesquiera sean los números reales a y b.

★ 2. Menos por menos es más.

★ 3. El cuadrado de la suma de dos números reales es igual a la suma de sus cuadrados más su doble producto: $(a + b)^2 = a^2 + 2a.b + b^2$.

La actitud frente a cada una de estas tres propiedades es, sin dudas, diferente. La primera le parecerá natural o se habrá convencido de ella viendo algunos ejemplos, la segunda la recordará como una "receta" de la cual habrá sido informado en su momento y, si lo ayuda la memoria, recordará que la tercera le ha sido *demostrada* de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a+b) . (a+b) = (a+b).a + (a+b).b = \\ &= a.a + b.a + a.b + b.b = \\ &= a^2 + 2a.b + b^2\end{aligned}$$

(ya que $a.b = b.a$).

Esta última observación sugiere las siguientes reflexiones:

*i En una lista de las propiedades de los números reales no haría falta incluir la propiedad 3 pues ella puede ser deducida de otras propiedades; en particular, parecería que sólo necesitamos saber que $a.b = b.a$ y saber cómo multiplicar una suma de números reales por otro número real.

*ii Si de esta manera eliminamos de nuestra lista aquellas propiedades que puedan ser deducidas a partir de otras más elementales, en algún momento deberíamos llegar a propiedades que no pueden ser demostradas, que deben servir como punto de partida.

A primera vista, las propiedades 1 y 2 deberían figurar en esa lista pues no parecen susceptibles de una demostración.

*iii Una vez obtenida una lista de propiedades que ya no podemos demostrar pero que nos sirven de punto de partida para demostrar todas las demás, esa lista podría considerarse que contiene todas las propiedades de los números reales, por lo menos potencialmente. Las propiedades enumeradas en dicha lista las podríamos denominar *básicas* y todas las restantes propiedades, demostrables a partir de las básicas, las podríamos denominar *derivadas*.

En el próximo parágrafo vamos a presentar la lista de propiedades básicas de los números reales; puede sorprender lo bajo que es el número de ellas; son tan sólo 14 y a partir de ellas es posible derivar todo el estudio de los números reales, en particular el contenido de este libro.

1.2. PROPIEDADES BASICAS DE LOS NUMEROS REALES

Comenzaremos por las propiedades básicas de la suma que son cuatro:

• S_1 (Propiedad conmutativa)

Cualesquiera sean los números reales a y b, vale:

$$a + b = b + a$$

• S_2 (Propiedad asociativa)

Cualesquiera sean los números reales a, b y c, vale:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

• S_3 (Propiedad de existencia del elemento neutro)

Existe un número real llamado "cero" y que indicamos "0" tal que, para todo número real a vale:

$$a + 0 = a$$

• S_4 (Propiedad de existencia del inverso aditivo)

Dado un número real a, existe un número real que llamamos "inverso aditivo de a", e indicamos "$-a$", tal que:

$$a + (-a) = 0$$

Las propiedades básicas del producto son también cuatro y se corresponden exactamente con las de la suma:

• P_1 (Propiedad conmutativa)

Cualesquiera sean los números reales a y b, vale:

$$a.b = b.a$$

• P_2 (Propiedad asociativa)

Cualesquiera sean los números reales a, b y c, vale:

$$a.(b.c) = (a.b).c$$

• P_3 (Propiedad de existencia del elemento neutro)

Existe un número real distinto de cero que llamamos "uno" e indicamos "**1**" tal que, para todo número real vale:

$$a.1 = a.$$

• **P_4 (Propiedad de existencia del inverso multiplicativo)**

Dado un número real **a**, ***distinto de cero***, existe un número real que llamamos "inverso multiplicativo de **a**", e indicamos a^{-1}, tal que:

$$a.a^{-1} = 1.$$

Incluimos ahora una propiedad que vincula la suma con el producto:

• **D (Propiedad distributiva)**

Cualesquiera sean los números reales **a**, **b** y **c**, vale:

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

Las últimas propiedades que indicamos ahora se refieren a la relación de orden que existe entre los números reales. La notación "$a < b$" significa "**a** es menor que **b**" y es exactamente lo mismo que "$b > a$" (**b** mayor que **a**).

• **O_1 (Propiedad de tricotomía)**

Si **a** y **b** son dos números reales, vale una, y sólo una, de las siguientes posibilidades:

→ $a < b$.

→ $a = b$,

→ $a > b$,

• **O_2 (Propiedad transitiva)**

Si **a**, **b** y **c** son números reales que verifican:

$$a < b$$
$$b < c$$

entonces necesariamente debe ser:

$$a < c$$

• **O_3 (Propiedad de monotonía de la suma)**

Si **a** y **b** son números reales que verifican:

$$a < b$$

entonces cualquiera sea el número real **c** vale:

$$a + c < b + c$$

• **O_4 (Propiedad de monotonía del producto)**

Si **a** y **b** son números reales que verifican:

$$a < b$$

entonces cualquiera sea el número real *mayor que cero* **c** vale:

$$c.a < b.c$$

◇◇◇◇◇◇

Vamos ahora a deducir algunas propiedades elementales de los números reales utilizando solamente las propiedades recién enumeradas. El lector atento habrá notado que prometimos una lista de 14 propiedades y sólo han aparecido 13; la restante no la necesitaremos por ahora y será objeto de estudio en un próximo parágrafo.

Comenzamos probando la "propiedad cancelativa" que se enuncia de la siguiente manera:

Si **a**, **b** y **c** son números reales tales que:

$$a + c = b + c$$

entonces es:

$$a = b$$

(en otras palabras, un término que aparezca sumado en ambos miembros se puede cancelar)

Para demostrar esta propiedad, partimos de la igualdad supuesta

$$a + c = b + c$$

Por S_4, existe el inverso aditivo $-c$ de c. Sumándolo a ambos miembros:

$$(a+c)+(-c)=(b+c)+(-c).$$

Por la propiedad asociativa S_2, la igualdad anterior se puede escribir en la forma:

$$a+(c+(-c))=b+(c+(-c)),$$

o sea, por S_4:

$$a+0=b+0.$$

Ahora por la propiedad S_3 resulta:

$$a=b.$$

que es lo que queríamos demostrar.

Otra propiedad que mostramos es la "unicidad del cero" que se enuncia así:

Si a y b son números reales tales que:

$$a+b=a,$$

entonces debe ser:

$$b=0.$$

Esta demostración es sencilla; a la igualdad:

$$a+b=a$$

le sumamos el inverso aditivo de a, $-a$, que existe por S_4:

$$(a+b)+(-a)=a+(-a).$$

Por S_4, el segundo miembro es cero:

$$(a+b)+(-a)=0.$$

Por S_1, la igualdad anterior se puede escribir en la forma:

$$(b+a)+(-a)=0,$$

o sea, por S_2:

$$b+(a+(-a))=0,$$

de donde, por S_4:

$$b+0=0.$$

es decir, por S_3:

$$b=0$$

que es lo que queríamos demostrar.

Estamos ahora en condiciones de probar:

$$a.0=0$$

cualquiera sea el número real a

Para ello hacemos lo siguiente; por S_3 es:

$$0+0=0$$

Multiplicando por a:

$$a.(0+0)=a.0$$

o sea, por la propiedad D:

$$a.0+a.0=a.0$$

Pero esta igualdad, por la unicidad del cero, nos lleva a:

$$a.0=0$$

(En efecto, en el enunciado sobre unicidad del cero hay que tomar a como $a.0$ y b también como $a.0$)

Esta última demostración ilustra el siguiente hecho: una vez que una propiedad ha sido demostrada a partir de las propiedades básicas, entonces dicha propiedad puede ser usada como punto de partida para probar nuevas propiedades. Es claro que de esta manera, en última instancia, sólo usamos las propiedades de la lista dada.

El producto también tiene su ley de cancelación:

Si $a.b=a.c$ y $a\neq 0$, entonces $b=c$.

Para demostrarla partimos de la igualdad supuesta:

$$a.b=a.c$$

Como $a\neq 0$ por hipótesis, existe a^{-1} por P_4. Multiplicando por a^{-1}:

$$a^{-1}.(a.b)=a^{-1}.(a.c)$$

de donde, por P_2:

$$(a^{-1}.a).b=(a^{-1}.a).c$$

o sea, por P_1:

$$(a.a^{-1}).b=(a.a^{-1}).c$$

de donde, por P_4:

$$1.b=1.c,$$

y, por último, por P_3:

$$b=c.$$

Pasamos ahora a probar la "regla de los signos". En primer término, vale:

$$-(-a)=a$$

para todo número real a. En efecto, por definición $-(-a)$ es el inverso aditivo de $-a$, es decir:

$$(-a)+(-(-a))=0.$$

Sumando a a ambos miembros:

$$a+((-a)+(-(-a)))=a+0,$$

o sea, por S_2 y S_3:

$$(a+(-a))+(-(-a))=a,$$

de donde, por S_4:

$$0+(-(-a))=a$$

y, por último, por S_1 y S_3:

$$-(-a)=a.$$

Continuamos probando:

$$(-a).b)=-(a.b)$$

cualesquiera sean los números reales a y b.

Esta propiedad se prueba de la siguiente manera:

$(-a).b+a.b)(=(-a+a).b$ (Propiedad D)

$=0.b=$ (Propiedad S_4)

$=0.$ (Propiedad recién demostrada)

Llegamos a la conclusión de que:

$$(-a).b+a.b=0.$$

Sumando $-(a.b)$ a ambos miembros:

$$((-a).b+a.b)+(-(a.b))=0+(-(a.b)),$$

o sea, por S_2 y S_3:

$$(-a).b+(a.b+(-(a.b)))=-(a.b),$$

de donde, por S_4:

$$(-a).b+0=-(a.b)$$

y, de nuevo por S_3:

$$(-a).b=-(a.b).$$

Ahora sí podemos probar la regla enunciada al principio del libro ("menos por menos es más") que resulta así una propiedad derivada:

$$(-a).(-b)=a.b$$

cualesquiera sean los números reales a y b. Apelando a los dos hechos recién probados:

$$\begin{aligned}(-a).(-b)&=-(a.(-b))\\&=-((-b).a)=\\&=-(-(b.a))=\\&=-(-(a.b))=\\&=a.b\end{aligned}$$

habiendo usado además la propiedad P_1.

Para terminar con esta sección, vamos a probar el siguiente hecho:

$$0<1$$

Por la ley de triconomía 0_1, bastará descartar las posibilidades:

$$0=1 \text{ y } 0>1.$$

La posibilidad $0=1$ está explícitamente descartada por P_3. Supongamos entonces que $0>1$. Sumando -1 a ambos miembros, por 0_3 es:

$$0+(-1)>1+(-1).$$

o sea, por S_3 y S_4:

$$-1>0$$

Pero si $-1 > 0$, multiplicando la desigualdad $-1 > 0$ por -1 resulta, por O_4:

$$(-1)(-1) > 0 . (-1)$$

o sea, de acuerdo a propiedades ya probadas:

$$1 . 1 > 0,$$

es decir, por P_3:

$$1 > 0.$$

Probablemente el lector se sorprenda si le decimos que con esta conclusión hemos llegado a una contradicción, ya que difícilmente aceptará que la desigualdad $1 > 0$ implique una contradicción. Pero recordemos lo que hemos probado: si es $1 < 0$, entonces resulta $1 > 0$; luego, si fuese $1 < 0$, sería simultáneamente $1 < 0$ y $1 > 0$ y esto *es* una contradicción, contradice O_1. Luego no puede ser $1 < 0$ y, habiendo descartado ya la posibilidad $1 = 0$, resulta:

$$0 < 1$$

Dejaremos el resto de las propiedades elementales de los números reales como ejercicio. Digamos desde ya que $a - b$ quiere decir $a + (-b)$ y que, para $b \neq 0$, a / b quiere decir $a . b^{-1}$. Asimismo dejaremos de indicar el producto con un punto, de modo que ab significará $a . b$.

EJERCICIOS

1

Probar detalladamente las siguientes propiedades derivadas de la suma e indicar en cada paso qué propiedades básicas o derivadas anteriormente se utilizan:

★ a *Si* a *y* b *son números reales tales que* $a+b = 0$, *entonces* $b = -a$ *(Unicidad del inverso aditivo)*

★ b *Si* a *es distinto de cero, entonces* $-a$ *es también distinto de cero.*

★ c *Si* $a - b = b - a$, *entonces* $a = b$.

2

Probar las siguientes propiedades derivadas de la suma y el producto (con las mismas recomendaciones que en el ejercicio anterior)

◆ a Si $ab = 0$, entonces es $a = 0$ ó $b = 0$.

◆ b $(-1) . a = -a$.

◆ c $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

3

Probar las siguientes propiedades derivadas del producto (mismas recomendaciones).

● a Si $a.b = a$ y $a \neq 0$, entonces $b = 1$ (Unicidad del elemento neutro).

● b Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$.

● c Si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.

● d Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

4

Probar las siguientes propiedades derivadas de la suma, el producto y el orden.

★ a $0 < a$ *si y sólo si* $-a < 0$ *(el "si y sólo si" significa probar las dos implicaciones: si* $0 < a$, *entonces* $0 < a$)

★ b *si* $a < b$ *y* $c < d$, *entonces* $a+c < b+d$.

★ c $a < b$ *si y sólo si* $-b < -a$.

★ d *si* $0 < a$ *y* $0 < b$, *entonces* $0 < ab$.

★ e *si* $a < 0$ *y* $b < 0$, *entonces* $0 < ab$.

★ f *si* $a < 0$ *y* $0 < b$, *entonces* $ab < 0$.

★ g *si* $a > 0, b > 0$ *y* $a < b$, *entonces* $a^2 < b^2$.

★ h *si* $a \neq 0$, *entonces* $a^2 > 0$. *Deducir nuevamente* $1 > 0$.

★ i) *si* $a^2 + b^2 = 0$, *entonces* a *y* b *son cero.*

1.3. NUMEROS NATURALES

Vamos a comenzar ahora a distinguir ciertos subconjuntos de los números reales. El primero de ellos es el de los ***números naturales*** a los que podríamos definir como aquellos números que utilizamos para contar, $1, 2, 3, 4$, etc.

Si continuamos con el punto de vista del parágrafo anterior, de partir solamente de las propiedades básicas de los números reales para derivar nuevas propiedades y para dar nuevas definiciones, entonces se pueden presentar dos objeciones a nuestra definición de números naturales.

La primera de ellas consiste en señalar que en las propiedades básicas de los números reales sólo se afirma la existencia de dos números reales, el 0 y el 1 (mencionados en S_3 y P_3 respectivamente). Por lo tanto podemos preguntar:

¿Qué son $2, 3$ y 4?

No es que supongamos que el lector no sabe que son $2, 3$ y 4, sino que persistimos en la actitud de considerar las propiedades básicas de los números reales como lo único que conocemos de ellos, como nuestros únicos datos; todo lo que después digamos de los números reales deberá ser deducido de las propiedades básicas.

Con este espíritu, hasta ahora sólo estamos seguros de que hay dos números reales, el 0 y el 1 (Obsérvese que efectivamente son dos; la propiedad P_3 dice explícitamente que 1 es distinto de cero). La solución a este problema es sencilla; ***por definición*** es

$$2 = 1 + 1$$

y este nuevo número es distinto de los ya conocidos. En efecto, ya sabemos que $1 > 0$, entonces por O_3 es $1+1 > 1+0$, o sea de acuerdo a nuestra definición y a S_3: $2 > 1$. Luego, por O_1, 2 es distinto de 1. Ahora, como $2 > 1$ y $1 > 0$, entonces por O_2 es $2 > 0$ y entonces, por O_1, 2 es distinto de 0.

Definiendo $3 = 2 + 1$ podemos repetir el razonamiento anterior y ver que 3 es un cuarto número real distinto de 0, 1 y 2. Vemos que de esa manera podemos definir tantos números naturales como queramos.

La segunda objeción es más grave; nuestra definición ha quedado de la siguiente manera: el conjunto de los números naturales es el conjunto formado por los números 1, $1 + 1$, $1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 1 + 1$, etc. Ahora bien ¿Qué quiere decir "etc."? Pues bien, es un sobreentendido; sin haber dicho cuáles son *todos* los números naturales nos quedamos seguros de que el lector entendió y puede reconocer un número natural cuando aparezca. Pero si queremos desarrollar un camino deductivo riguroso a partir solamente de las propiedades básicas, entonces *los sobreentendidos no caben*, debemos dar otra definición del conjunto de los números naturales.

Entiéndase bien: no es que esté mal hacer sobreentendidos cuando se trabaja en Matemática, es sólo que nos hemos propuesto desarrollar los elementos del Análisis Matemático de una manera deductiva y rigurosa y esa actitud nos guiará en todo el libro.

Tampoco debe pensarse que estamos haciendo una especie de juego; el hecho de que se pueda desarrollar el Análisis (o cualquiera otra rama de la Matemática) de manera deductiva a partir de unas pocas propiedades es *muy importante*; volveremos sobre este punto más adelante. Por ahora retornemos a los números naturales.

Si pudiésemos encontrar alguna propiedad que caracterizase a los números naturales, es decir una propiedad que fuese satisfecha por los naturales y solamente por ellos, entonces podríamos tomar dicha propiedad como definitoria de los naturales.

Hay una propiedad que evidentemente satisfacen: si n es un número natural, entonces $n + 1$ también es un número natural. Pero esta propiedad no es defini-

toria, ya que el conjunto de los números 2, 3, 4, 5, etc., también la satisface; agregamos entonces la propiedad de que 1 sea un número natural. Estas dos propiedades juntas tampoco definen a los naturales sino a conjuntos amplios de números reales a los que, para abreviar, les damos desde ya un nombre:

DEFINICION 1.1.

Un subconjunto A de los números reales se dice *inductivo* si tiene las dos siguientes propiedades:

1. El número 1 pertenece a A (escribiremos ésto en la forma $1 \in A$.
2. Si algún número real n pertenece a A, entonces el número real $n+1$ también pertenece a A.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Como dijimos recién, el hecho de ser inductivo no caracteriza al conjunto de los números naturales. En efecto, el conjunto de todos los números reales es inductivo (y no coincide con el conjunto de los naturales, aunque más no sea por contener al 0 que no es natural).

Pero hay una propiedad relacionada con la inductividad que va a darnos la solución a nuestro problema: supongàmos que A es un conjunto inductivo. Entonces, por 1., el 1 pertenece a A. Sabiendo que $1 \in A$ podemos concluir, por 2., que $2 = 1 + 1 \in A$. Ahora sabiendo que $2 \in A$ podemos concluir, también por 2., que $3 = 2 + 1 \in A$. Una aplicación reiterada de este razonamiento nos muestra que todos los números naturales están en A. En términos de conjuntos, si N es el conjunto de los naturales, entonces cualquiera sea el conjunto inductivo A resulta $N \subset A$ (N incluido en A).

En otras palabras, si queremos definir los números naturales de manera que resulten ser lo que todos esperamos que sean (el 1, 2, 3, 4, etc.), tenemos que explicitar su propiedad de estar incluido en cualquier conjunto inductivo.

Toda la discusión anterior es sólo para poder entender el motivo de nuestra próxima definición:

DEFINICION 1.2.

Llamaremos *conjunto de los números naturales*, y lo indicaremos por N, al subconjunto de los números reales caracterizado por las siguientes propiedades:

N_1) N es inductivo

N_2) Si A es cualquier subconjunto inductivo de números reales, entonces $N \subset A$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Una vez establecida la definición del conjunto de los números naturales, dejamos de lado toda la discusión previa; todo lo que, a partir de ahora, probemos sobre los números naturales deberá ser deducido solamente de las propiedades básicas N_1 y N_2.

Antes de comenzar dichas demostraciones, queremos mencionar un detalle relativo a la Definición 1.2. El lector suspicaz podría formularse la siguiente pregunta: ¿cómo sé que N_1 y N_2 caracterizan al conjunto de los números naturales, no habrá *otros* conjuntos que cumplan N_1 y N_2? Más aún ¿cómo sé siquiera que *existe* un conjunto que satisface N_1 y N_2?

La respuesta a esas dos preguntas es sencilla, pero para no distraer la atención con un tema colateral, preferimos mandar al mencionado lector al Problema 4, que figura al final del presente parágrafo, en donde podrá encontrar la solución. Ahora comenzamos a probar propiedades de N.

La primera propiedad es tan fácil de demostar que puede costar entender porqué se le da un nombre (aunque enseguida veremos su enorme utilidad):

TEOREMA 1.3.

(PRINCIPIO DE INDUCCION)

Si H es un subconjunto inductivo de N, entonces $H = N$.

Demostración: Que H sea un subconjunto de N significa $H \subset N$. Pero al ser H inductivo, entonces $N \subset H$ por N_2. De las dos inclusiones $H \subset N$ y $N \subset H$ concluimos $H = N$. ///

Hay una forma "popular" del principio de inducción que vamos a indicar ahora.

COROLARIO 1.4.

Supongamos que para cada número natural n *tenemos una afirmación* P(n) *sobre él (por ejemplo,* P(n) = "n *es mayor que* 3" *o* P(n) = "n *es igual a su cuadrado" o cualquier otra) de tal manera que se verifiquen las dos siguientes condiciones:*

- *La afirmación* P(1) *es verdadera*
- *Para todo número natural* n *ocurre lo siguiente: si suponemos que* P(n) *es verdadera podemos deducir entonces que* P(n + 1) *es también verdadera.*

En ese caso la afirmación P(n) *es verdadera para todo número natural* n.

Demostración: Consideramos el siguiente conjunto:

$$H = \{n \in N : P(n) \text{ es verdadera}\}$$

(léase "H igual al conjunto de los n pertenecientes a los naturales tales que P(n) es verdadera").

En primer término, por su propia construcción, H es un subconjunto de N; en efecto, los elementos de H son aquellos números *naturales* n para los cuales P(n) es verdadera, es decir, los elementos de H son todos números naturales. Pero además H es inductivo; en efecto, $1 \in H$ porque por hipótesis P(1) es verdadera y, por otra parte, si $n \in H$ entonces P(n) es verdadera; por hipótesis, eso implica que P(n + 1) es verdadera, o sea $n + 1 \in H$.

Al ser H un subconjunto inductivo de N, el Teorema 1.3. nos dice que $H = N$. Pero esto último significa exactamente que P(n) es verdadera para todo $n \in N$. ///

Utilizaremos ahora el principio de inducción para probar propiedades elementales de los números naturales.

PROPOSICION 1.5.

Si n y m son números naturales, entonces m + n y m.n son también números naturales.

▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪

Demostración: Probamos primero que m + n es un número natural. Para ello consideramos la siguiente afirmación:

P(n) = "*Para todo número natural* m, m + n *es un número natural*"

Entonces lo que tenemos que probar es que P(n) es verdadera cualquiera sea el número natural n; el Corolario 1.4. nos dice cómo hacerlo: hay que probar que P(1) es verdadera y que de la verdad de P(n) se deduce la verdad de P(n + 1).

Observemos que la proposición P(1) es:

P(1) = "*Para todo número natural* m, m + 1 *es un número natural*"

Pero entonces $P(1)$ es trivialmente verdadera: por N_1 de la Definición 1.2, el conjunto N de los números naturales es inductivo y que sea inductivo significa, en particular, que si $m \in N$ entonces $m + 1 \in N$ y eso es justamente lo que dice $P(1)$.

Vamos ahora a probar que de la verdad de $P(n)$ se deduce la verdad de $P(n + 1)$. Obsérvese bien que no vamos a probar ni la verdad de $P(n)$ ni la de $P(n + 1)$ sino que vamos a probar que *si* $P(n)$ es verdadera *entonces* $P(n + 1)$ también lo es.

Supongamos entonces $P(n)$ verdadera, esto es, supongamos que para todo número natural m, la suma $m + n$ es un número natural.

Tenemos que probar la verdad de $P(n + 1)$, o sea que para todo número natural m, la suma $m + (n + 1)$ es un número natural. Pero:

$$m + (n + 1) = (m + n) + 1$$

y, por hipótesis inductiva, $m + n$ es un número natural (estamos suponiendo que $P(n)$ es verdadera). Pero al ser $m + n$ un número natural, como el conjunto de los números naturales es inductivo resulta que $(m + n) + 1$ también es un número natural cualquiera sea el natural m. Luego $P(n + 1)$ es verdadera.

Resumiendo, hemos probado la verdad de $P(1)$ y hemos deducido la verdad de $P(n + 1)$ de la verdad de $P(n)$. Por el Corolario 1.4., eso significa que $P(n)$ es verdadera para todo número natural n; entonces es cierta la afirmación "cualquiera sea el número natural n, $m + n$ es un número natural cualquiera sea el número natural m" o, lo que es lo mismo "cualesquiera sean los números naturales m y n, la suma $m + n$ es también un número natural".

Habiendo hecho en detalle la demostración de nuestra primer afirmación hacemos más brevemente la demostración de la segunda. Consideramos la afirmación:

$P(n)$ = "*Para todo número natural* m, $m.n$ *es un número natural*"

La afirmación $P(1)$ es verdadera puesto que $m.1 = m$ que por hipótesis es un número natural. Supongamos entonces que es verdadera la afirmación $P(n)$ para un cierto número natural n y veamos que eso implica que también la afirmación $P(n + 1)$ es verdadera. Para ello, si m es un número natural cualquiera entonces, por la propiedad D:

$$\begin{aligned} m.(n + 1) &= m.n + m.1 = \\ &= m.n + m \end{aligned}$$

En esta suma, el primer sumando $m.n$ es un número natural porque estamos suponiendo $P(n)$ verdadera y el segundo sumando m es un número natural por hipótesis. Como ya sabemos que la suma de números naturales es un número natural (es la primera parte de esta Proposición), entonces $m.n + m$ es un número natural cualquiera sea el número natural m. Pero eso es decir que $P(n + 1)$ es verdadera.

Nuevamente hemos probado la verdad de $P(1)$ y que de la verdad de $P(n)$ se deduce la verdad de $P(n + 1)$. Luego, por el Corolario 1.4., $P(n)$ es verdadera para todo número natural n, que es lo que queríamos demostrar. ///

Antes de demostrar más propiedades de los números naturales vamos a introducir un nuevo concepto: decimos que a es *mayor o igual* que b, y escribimos $a \geqslant b$, si se da alguna de las dos siguientes posibilidades:

* i a es mayor que b;
* ii a es igual a b.

Entonces para que sea cierto que $a \geqslant b$ basta con que una de las dos posibilidades sea verdadera (las dos juntas no pueden serlo). Así, por ejemplo, es verdad que $2 \geqslant 1$ (porque, si bien no es $2 = 1$, sí es cierto que $2 > 1$) y es verdad que $3 \geqslant 3$ (porque es $3 = 3$ aunque no sea $3 > 3$) pero no es verdad que $1 \geqslant 3$ (pues ni es $1 = 3$ ni es $1 > 3$). Esta relación tiene las siguientes propiedades):

- 1. Si $a \geqslant b$ y $b \geqslant a$, entonces $a = b$.
- 2. Si $a \geqslant b$ y $b \geqslant c$, entonces $a \geqslant c$.
- 3. Si $a \geqslant b$, entonces $a + c \geqslant b + c$ cualquiera sea el número real c.
- 4. Si $a \geqslant b$ y c es *mayor que cero*, entonces $a.c \geqslant b.c$.

Demostramos sólo las dos primeras y dejamos las dos restantes como ejercicio.

Demostración de 1: Que sea $a \geqslant b$ significa que o bien es $a > b$ o bien es $a = b$. Como queremos demostrar $a = b$, veamos que no puede ser $a > b$. Si así fuese, entonces no podría ser ni $b > a$ ni $a = b$ (por tricotomía, O_1) y entonces sería falso que $b \geqslant a$. Pero ésta es una de nuestras hipótesis; luego no puede ser $a > b$ y entonces necesariamente $a = b$.

Demostración de 2: Como $a \geqslant b$, entonces o bien es $a = b$ o bien es $a > b$ y como $b \geqslant c$ entonces o bien es $b > c$ o bien es $b = c$. Esto nos deja cuatro posibilidades:

- i $a = b$ y $b > c$;
- ii $a = b$ y $b = c$;
- iii $a > b$ y $b > c$;
- iv $a > b$ y $b = c$.

En el caso i), como a es lo mismo que b y b es mayor que c, entonces a es mayor que c, $a > c$. Pero si es $a > c$, entonces es cierto que $a \geqslant c$ (1). En el caso ii), es $a = c$ y por lo tanto es cierto que $a \geqslant c$ (ver nota (1)). En el caso iii) resulta por O_2 que $a > c$ y por lo tanto $a \geqslant c$. Por último, en el caso iv) resulta $a > c$ (pues a es mayor que b y b es lo mismo que c) y por lo tanto $a \geqslant c$. En definitiva, en todos los casos resulta $a \geqslant c$.

(1) Esta afirmación, que $a > c$ implica $a \geqslant c$, suele causar sorpresa entre los alumnos aunque es consecuencia inmediata de la definición de $\geqslant$. Es cierto que "$a > c$ implica $a \geqslant c$" y también es cierto que "$a = c$ implica $a \geqslant c$". *No* es cierto que "$a \geqslant c$ implica $a > c$" *ni* tampoco es cierto que "$a \geqslant c$ implica $a = c$". Si es cierto (y es la definición) que "$a \geqslant c$ implica $a > c$ ó $a = c$".

Volvemos ahora a propiedades elementales de los números naturales:

PROPIEDAD 1.6.

Si n es un número natural, entonces $n \geqslant 1$

Demostración: Consideramos la afirmación:

$$P(n) = \text{“} n \geqslant 1 \text{”}$$

Entonces $P(1)$ es verdadera pues afirma que $1 \geqslant 1$. Supongamos que $P(n)$ es verdadera para un cierto número natural n, es decir, supongamos que efectivamente es $n \geqslant 1$. Entonces, por la Propiedad 3 de $\geqslant$ recién enunciada:

$$n + 1 \geqslant 1 + 1 = 2 \geqslant 1$$

o sea, por la Propiedad 2, $n + 1 \geqslant 1$. Pero esto último es decir que $P(n + 1)$ es verdadera. Luego, habiendo probado que $P(1)$ es verdadera y que la verdad de $P(n)$ implica la de $P(n + 1)$, resulta por el Corolario 1.4. que $P(n)$ es verdadera para todo número natural n, que es lo que queríamos demostrar. ///

Queremos ahora probar el hecho, intuitivamente claro, de que si a un número natural se le resta un número natural menor, el resultado es un número natural. Como paso previo, probamos la siguiente Proposición:

PROPOSICION 1.7.

Si n es un número natural entonces o bien es $n = 1$ o bien es $n - 1$ un número natural.

Demostración: Consideramos la siguiente afirmación:

$$P(n) = \text{“}n = 1 \text{ ó } n - 1 \in N\text{”}$$

Antes de empezar la demostración, analicemos un poco esta afirmación. Como dice que pasa una cosa *o* pasa otra, entonces para que sea verdadera basta que sea verdadera una de las dos cosas. Así, por ejemplo, $P(3)$ es verdadera porque si bien no es $3 = 1$, en cambio sí es cierto que $3 - 1 = 2 \in N$. Analogamente, $P(1)$ es verdadera porque $1 = 1$ aunque $1 - 1 = 0$ no sea un número natural.

Pasemos ahora a la demostración. Acabamos de indicar que $P(1)$ es verdadera; vamos a probar ahora que, suponiendo $P(n)$ verdadera para un cierto número natural n, resulta $P(n+1)$ verdadera.

Supongamos entonces $P(n)$ verdadera; eso quiere decir que vale una de las siguientes posibilidades: o bien es $n = 1$ o bien es $n - 1 \in N$. Analicemos cada caso por separado.

Si fuese $n = 1$, entonces sería $n + 1 = 1 + 1 = 2$ y la verdad de $P(n+1)$ es la verdad de $P(2)$. Pero $P(2)$ es verdadera porque, si bien no es $2 = 1$, sí es cierto que $2 - 1 = 1 \in N$. Luego, en este caso, $P(n+1)$ es verdadera.

Si fuese $n - 1 \in N$ entonces también $P(n+1)$ es verdadera. En efecto, podrá no ser $(n+1) - 1 = 1$ pero sí es cierto que $(n+1) - 1 = (n-1) + 1$ o sea $(n+1) - 1$ es la suma del número natural $n - 1$ (estamos suponiendo $n - 1 \in N$) y del número natural 1. Como la suma de números naturales es un número natural (por Proposición 1.5.), concluimos que $(n+1) - 1 \in N$. Luego $n + 1$ satisface la segunda posibilidad y $P(n+1)$ resulta así verdadera.

En resumen, que $P(n)$ sea verdadera significa que n satisface una de dos posibilidades y en ambos casos resulta $P(n+1)$ verdadera. Luego la verdad de $P(n)$ implica la verdad de $P(n+1)$. Si agregamos que ya sabemos que $P(1)$ es verdadera, concluimos por el Corolario 1.4. que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in N$, o sea, para todo $n \in N$ es $n = 1$ o bien $n - 1 \in N$.

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado anunciado:

PROPOSICION 1.8.

Si m y n son números naturales y es $n < m$, entonces $m - n$ es también un número natural.

Demostración: Consideramos la afirmación:

$P(n) =$ “*Cualquiera sea* $m \in N$ *vale que* $n < m$ *implica* $m - n \in N$”.

Entonces probar la Proposición es lo mismo que probar que $P(n)$ es verdadera para todo número natural n. Aplicamos el principio de inducción nuevamente; la afirmación $P(1)$ es que si $m > 1$ entonces $m - 1 \in N$ cualquiera sea $m \in N$. Esta afirmación es verdadera como consecuencia inmediata de la Proposición 1.7.

Supongamos ahora que $P(n)$ es verdadera para un cierto número natural n, esto es, si $n < m$ entonces $m - n \in N$ cualquiera sea $m \in N$. Para probar $P(n+1)$ observamos que $P(n+1)$ es una implicación, a saber:

“*Si* $n + 1 < m$ *entonces* $m - (n+1) \in N$ cualquiera sea $m \in N$” y para probar la verdad de esta implicación hay que suponer cierto el antecedente (o sea $n + 1 < m$) y deducir en base a eso el consecuente (o sea $m - (n+1) \in N$).

Supongamos entonces $n + 1 < m$; como n es un número natural, $n \geqslant 1$ y entonces $m > 1 + 1 = 2$. En particular m no puede ser 1 y en consecuencia la Proposición 1.7. nos permite deducir que $m - 1 \in N$. Pero la desigualdad $n + 1 < m$ es equivalente a la desigualdad $n < m - 1$ y aquí podemos aplicar la verdad de $P(n)$, que es nuestra hipótesis, para concluir que:

$$(m-1) - n \in N$$

o sea:

$$m - n - 1 \in N$$

o también:

$$m - (n+1) \in N$$

y esto es justamente lo que había que probar.

Hasta ahora hemos usado inducción en todas las demostraciones de propiedades elementales de N. Eso ocurre pues N está prácticamente definido por el principio de inducción, único instrumento para probar sus primeras propiedades derivadas.

Pero en cuanto se tienen probadas algunas de ellas, con esos resultados se pueden derivar otras propiedades sin usar, quizás, el principio de inducción en la demostración.

La siguiente Proposición es un ejemplo de ello:

PROPOSICION 1.9.

Si n y m son números naturales y $m > n$, entonces es $m \geqslant n + 1$.

Demostración: Al ser $n < m$, por la Proposición 1.8. es $m - n \in N$. Pero entonces, por la Proposición 1.6., es:

$$m - n \geqslant 1$$

o sea:

$$m \geqslant n + 1$$

Vamos ahora a probar una propiedad muy importante de N.

Digamos antes que si A es un conjunto cualquiera de números reales, un elemento a de A se dice que es el *mínimo* de A si es menor que todos los demás elementos de A.

Puesto en otra forma: si A es un conjunto de números reales, un número real a se dice mínimo de A si se cumplen las dos siguientes condiciones:

★ i) a pertenece a A;

★ ii) si $b \in A$, entonces $a \leqslant b$ (ponemos $\leqslant$ en lugar de $<$ porque b podría ser el mismo a) (1).

No todo conjunto $A \subset R$ tiene mínimo (sobre esto volveremos más adelante) pero si suponemos $A \subset N$, la cosa cambia:

TEOREMA 1.10.

(PRINCIPIO DE BUENA ORDENACION DE N)

Si A es un subconjunto de N y A no es el conjunto vacío entonces A tiene mínimo.

Demostración: Vamos a hacer esta demostración por inducción (o sea, usando el Corolario 1.4.). En las anteriores demostraciones, era muy fácil elegir $P(n)$ pues estaba prácticamente dada por el enunciado de la correspondiente Proposición. Aquí en cambio hay que ingeniárselas para construir la $P(n)$ que nos lleve a buen término. Conviene considerar la siguiente:

$P(n) =$ “*Todo conjunto* $A \subset N$ *que contiene a* n *tiene mínimo*”

Con esta $P(n)$, $P(1)$ resulta verdadera porque si $A \subset N$ contiene al 1 automáticamente se cumple la condición i) (o sea, $1 \in A$) y también la condición ii): si $b \in A$, como $A \subset N$ entonces en particular $b \in N$. Luego, por la Proposición 1.6., $b \geqslant 1$ o, lo que es lo mismo, $1 \leqslant b$.

Supongamos ahora que $P(n)$ es verdadera para un cierto número natural n y probemos, en base a eso, la verdad de $P(n+1)$. Sea entonces A un subconjunto de N al cual pertenece $n + 1$.

---

(1) Desde luego, $a \leqslant b$ significa que o bien a es menor que b o bien a es igual a b y es equivalente a $b \geqslant a$

Puede ocurrir que A también contenga a n, en cuyo caso A tiene mínimo por hipótesis inductiva (la "hipótesis inductiva" es la suposición de la verdad de $P(n)$).

Si no es así, hacemos lo siguiente consideramos el conjunto A' que consiste en agregarle a A el número n (ésto se escribe $A \cup \{n\}$ y se lee "A *unión* el conjunto que sólo tiene al n"). Entonces A' es un conjunto incluido en N que contiene a n. Por hipótesis inductiva, A' tiene un mínimo al cual llamamos a.

Como $a \in A'$ existen dos posibilidades: o bien $a \in A$ o bien es $a = n$. En el primer caso, a satisface automáticamente la condición i) y sólo resta ver que satisface ii). Sea entonces $b \in A$; como $A \subset A'$, entonces es $b \in A'$ y como a es por definición el mínimo de A' resulta $a \leqslant b$. Luego, en este caso, a es el mínimo de A.

En el segundo caso, o sea cuando $a = n$, vamos a probar que $n + 1$ es el mínimo de A.

En efecto, $n + 1 \in A$ por hipótesis, así que $n + 1$ satisface la condición i). Además, si $b \in A$, como $A \subset A'$ resulta $b \in A'$ y por lo tanto $n \leqslant b$ ya que n es el mínimo de A. Pero no puede ser $n = b$ pues $b \in A$ y estamos considerando el caso en que A no contiene a n. Luego $n < b$ y entonces, por Proposición 1.9., $n + 1 \leqslant b$. Luego $n + 1$ satisface ii) y entonces $n + 1$ es el mínimo de A.

Resulta entonces que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in N$ y eso prueba el Teorema: en efecto, si $A \subset N$ y no es vacío, entonces A tiene por lo menos un elemento, digamos n. Cualquiera sea ese n, como $P(n)$ es verdadera entonces A tiene mínimo. ///

EJERCICIOS

1.

Demostrar que si n y m son números naturales y $m > n$, entonces $m \geqslant n + 1$ usando sólo el principio de inducción.

2.

Demostrar el principio de inducción "fuerte": supongamos que para cada número natural n tenemos una afirmación $P(n)$ sobre él de tal manera que se verifiquen las dos siguientes condiciones:

- i) $P(1)$ es verdadera;
- ii) Si $P(k)$ es verdadera para todo $k \leqslant n$, entonces $P(n + 1)$ es verdadera.

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in N$ (SUGERENCIA: considerar la afirmación $Q(n)$ = "$P(k)$ es verdadera para los números naturales k menores o iguales que n").

3.

Sea n_0 un número natural cualquiera y supongamos que para cada número natural n tenemos una afirmación $P(n)$ acerca de él de tal manera que se verifiquen las dos siguientes condiciones:

- i) *$P(n_0)$ es verdadera;*
- ii) *si $P(k)$ es verdadera para un cierto natural k, entonces $P(k + 1)$ es también verdadera. Probar que $P(n)$ es verdadera para todo natural $n \geqslant n_0$ (SUGERENCIA: considerar $Q(n) = P(n - n_0 + 1)$).*

4.

Recordamos que la *intersección* de una familia de conjuntos se define como el conjunto formado por los elementos que pertenecen a *todos* los conjuntos de la familia dada. Definimos ahora N, conjunto de los números naturales, como la intersección de todos los subconjuntos inductivos de R.

Entonces un número real es un número natural si y sólo si ese número pertenece a *todos* los subconjuntos inductivos de R. Probar:

- a) Con esta definición, N satisface N_1) y N_2)
- b) Si H es un subconjunto de R que satisface N_1) y N_2), entonces $H = N$.

Este Ejercicio prueba que, como afirmamos antes, las propiedades N_1 y N_2 caracterizan al conjunto de los números naturales.

1.4. DEFINICIONES POR INDUCCION

Vamos a agrupar en este parágrafo ciertas definiciones de conceptos que presuponen la noción de número natural y vamos a ver cómo, por el punto de vista que estamos desarrollando, aparecen ciertas dificultades lógicas en las definiciones elementales o "ingenuas" de estos conceptos, dificultades que salvaremos parcialmente por ahora y definitivamente en el próximo capítulo.

Comenzaremos con la definición de ***potencias de exponente natural.***

> **Si a es un número real cualquiera y n es un número natural, sabemos que a^n quiere decir el producto de a por sí mismo n veces.**

Pero ¿qué quiere decir "n veces" si n es un natural cualquiera? Esta pregunta puede provocar sorpresa, todo el mundo sabe lo que quiere decir 4 veces, 5 veces, etc. Pero si pensamos cuál es nuestra ***definición*** de número natural, la sorpresa puede desaparecer. Pues para nosotros un número natural es (ver ejercicio 4 del parágrafo anterior) un número real que pertenece a todos los subconjuntos inductivos de R. Y eso es todo lo que sabemos del número natural (además de lo que ya hemos probado en el parágrafo anterior). Entonces, aún cuando esté claro qué es a^4 ó a^{18}, para estar seguros de que sabemos qué es a^n ***para todo natural*** n hay que buscar otro camino.

El camino, como siempre, es el principio de inducción. Si queremos definir a^n para todo natural n, definámoslo para $n = 1$ de la manera obvia:

$$a^1 = a \qquad (1)$$

y luego, supuesto que lo hemos definido para un cierto natural n, definámoslo para $n + 1$ de la siguiente, y también obvia, manera:

$$a^{n+1} = a^n \cdot a \qquad (2)$$

De esta forma cumplimos con haber definido a^n para todo n natural. Más precisamente, si $P(n)$ es la afirmación "está definido a^n" entonces $P(1)$ es verdadera por (1) y, supuesto $P(n)$ verdadera, resulta $P(n + 1)$ verdadera por (2). Luego, por el Corolario 1.4., $P(n)$ es verdadera para todo natural n, que es lo que queríamos.

A riesgo de hastiar al lector, vamos a formular nuevamente la pregunta de rutina: ¿qué quiere decir "estar definido"? Debemos confesar que no podemos por ahora contestar esa pregunta, cosa que haremos en el apéndice del próximo capítulo. Mientras tanto, apelamos a su buena voluntad.

Habiendo definido ya la potencia de exponente natural, probamos sus principales propiedades:

PROPOSICION 1.11.

Sea a un número real cualquiera y sean m y n números naturales cualesquiera. Entonces vale:

★ a) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

★ b) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Demostración: a) Consideramos la siguiente afirmación:

$P(n)$ = "a^{m+n} es igual a $a^m \cdot a^n$ cualquiera sea el número natural m"

Entonces $P(1)$ es verdadera; en efecto, cualquiera sea el natural m será, *de acuerdo a (2):*

$$a^{m+1} = a^m . a .$$

mientras que $a^m . a^1 = a^m . a$ por (1).

Supongamos que $P(n)$ es verdadera, es decir:

$$a^{m+n} = a^m . a^n .$$

cualquiera sea el natural m.

Probamos en base a eso la verdad de $P(n+1)$:

$$a^{m+(n+1)} = a^{(m+n)+1} = a^{m+n} . a = (a^m . a^n)\, a =$$
$$= a^m . (a^n . a) = a^m . a^{n+1}$$

en donde hemos usado (2). Luego $P(n+1)$ es verdadera.

Resulta entonces $P(n)$ verdadera para todo natural n, que es justamente lo que queríamos probar.

Demostracion: b) Consideramos la afirmación:

$P(n)$ = "$(a^m)^n$ es igual a $a^{m.n}$ cualquiera sea el natural m"

Verdad de $P(1)$:

$(a^m)^1 = a^m$ por (1)

y

$a^{m.1} = a^m$ por ser $m . 1 = m$

Supongamos ahora que $P(n)$ es verdadera; entonces:

$$\begin{aligned} (a^m)^{n+1} &= (a^m)^n . a && \text{(por (2))} \\ &= a^{m.n} . a^m && \text{(por hipótesis inductiva)} \\ &= a^{m.n+m} && \text{(por a) que ya lo probamos)} \\ &= a^{m.(n+1)} && \text{(por propiedad distributiva)} \end{aligned}$$

lo que establece la verdad de $P(n+1)$.///

A esta altura, el lector podría pensar que el principio de inducción sólo sirve para demostrar formalmente afirmaciones cuya verdad es intuitivamente evidente. Que ello no es así, se puede ver tratando de probar directamente (sin inducción) la siguiente Proposición.

PROPOSICION 1.12.

(DESIGUALDAD DE BERNOULLI)

Si h es un número real mayor que -1, entonces para todo número natural n vale:

$$(1+h)^n \geqslant 1 + nh .$$

Demostración: Para $n = 1$ se cumple la igualdad, así que la afirmación anterior es cierta. Supongamos que para cierto natural n es $(1+h)^n \geqslant 1 + nh$. Entonces:

$$\begin{aligned} (1+h)^{n+1} &= (1+h)^n . (1+h) \geqslant \\ &\geqslant (1+nh)(1+h) = \\ &= 1 + nh + h + nh^2 = \\ &= 1 + (n+1)\,h + nh^2 \geqslant \\ &\geqslant 1 + (n+1)\,h \end{aligned}$$

lo cual prueba que la afirmación es verdadera para $n + 1$. Luego es verdadera para todo natural n. (Pregunta: ¿dónde hemos usado la hipótesis $h > -1$?)

Vamos ahora a introducir un concepto sobre el que volveremos con mucho más detalle en el capítulo 3 y es el de *sucesión*; entendemos por sucesión una asignación a cada número natural n de un número real que indicaremos a_n. La sucesión se suele escribir:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Por ejemplo, si a cada número natural n se le asigna su cuadrado, obtenemos la suceción dada por $a_n = n^2$ y que se escribe:

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2$$

Como otro ejemplo, consideremos la asignación a cada natural n del número real $a_n = (-1)^n$ Con esto tenemos la sucesión:

$$-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$$

Como último ejemplo, consideremos la asignación a cada número n del número real $a_n = \frac{1}{n}$. Esto nos da la sucesión:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Si ahora tenemos una sucesión determinada $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, queremos definir la suma de los n primeros términos de dicha sucesión, cosa que indicaremos en la forma:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

o también, en la forma más compacta y precisa:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

(léase: "suma desde $k = 1$ hasta $k = n$ de los a_k")

Como queremos definir la suma de los n primeros términos de la sucesión y como esto lo queremos hacer para cada natural n, hay un único camino para hacerlo. Sí, adivinó, inducción. Definimos primero:

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$$

(¿qué otra cosa podría ser?)

y luego, supuesto que hemos definido

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

definimos:

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$$

y el principio de inducción nos asegura que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

está definido para todo natural n.

Así, por ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{2} a_k = \left(\sum_{k=1}^{1} a_k\right) + a_2 = a_1 + a_2$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_k = \left(\sum_{k=1}^{2} a_k\right) + a_3 = (a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = \left(\sum_{k=1}^{3} a_k\right) + a_4 = (a_1 + a_2 + a_3) + a_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \text{ etc.}$$

Una vez definido el concepto de "suma de n términos" para todo número natural n, podemos probar varias fórmulas que suelen ser la aplicación típica del principio de inducción. Como ejemplo, consideramos la sucesión dada por $a_n = n$. En este caso:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

no es otra cosa que:

$$\sum_{k=1}^{n} k,$$

o, si el lector prefiere la otra notación, $1 + 2 + \ldots + n$. Vamos a probar que:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

para todo natural n,

o sea, en la otra notación, $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Para ello consideramos la afirmación:

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} k \text{ es igual a } \frac{n(n+1)}{2}.$$

Entonces $P(1)$ dice que

$$\sum_{k=1}^{1} k \text{ es igual a } \frac{1.(1+1)}{2} = 1,$$

lo cual es cierto pues:

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 \text{ por definición}$$

y en este caso $a_1 = 1$.

Supongamos $P(n)$ verdadera; para probar la verdad de $P(n+1)$, notemos que es:

$$P(n+1) = \text{“}\sum_{k=1}^{n+1} k \text{ es igual a } \frac{(n+1)(n+2)}{2}\text{”}$$

Pero:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = \text{(por hipótesis inductiva)}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

con lo cual $P(n+1)$ resulta verdadera. Luego $P(n)$ es verdadera para todo número natural n.

EJERCICIOS

1

Probar que si a y b son números reales cualesquiera, entonces para todo número natural n vale:

$$(a.b)^n = a^n.b^n.$$

(Usar inducción y P_1).

2

Probar que si $0<a<b$, entonces $a^n<b^n$ para todo natural n.

3

★ a) Probar que si $a \neq 0$, entonces $a^n \neq 0$ para todo natural n (Inducción).

★ b) Probar que si $a \neq 0$, entonces $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$ para todo natural n (Usar 1 para calcular $(a^{-1})^n . a^n$).

★ c) Probar que si a y b son números reales cualesquiera y $b \neq 0$, entonces es:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ para todo natural } n,$$

(Usar a) y b)).

★ d) Probar que si $a>1$ y $n \in N$, entonces $a^n>1$ Deducir que si m y n son naturales y $n<m$, entonces $a^n<a^m$.

★ e) ¿qué pasa si $0<a<1$? usar d) y $1/a>1$

4

♦ a) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ dos sucesiones cualesquiera. Probar que para todo número natural n vale:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

(Inducción)

♦ b) Probar que si c es un número real cualquiera, entonces para todo natural n vale:

$$\sum_{k=1}^{n} c\,a_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(También por inducción)

5

Sea n_0 un número natural cualquiera y $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ una sucesión. Definimos inductivamente:

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k \text{ para } n \geqslant n_0$$

de la siguiente manera:

• i) $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{n_0} a_k = a_{n_0}$

• ii) $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=n_0}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$

■ a) Mostrar que: $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} a_k$

está definido por todo natural $n \geqslant n_0$

(Usar ejercicio 3 del parágrafo 1.3.)

■ b) Probar que si $n>n_0$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k$$

(Inducción sobre n)

■ c) Probar que si $n>n_0$, entonces

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n-n_0+1} a_{k+n_0-1}$$

■ d) Para una sucesión $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$

definir $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ y probar:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$$

6

Probar por inducción las siguientes afirmaciones:

★ a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

★ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$ $(r \neq 1)$

★ c) $2^n \geqslant n^2$ *para todo* $n \geqslant 4$

★ d) $n^3 > 4n^2+3n+1$ *para todo* $n \geqslant 5$

1.5.

MAS DEFINICIONES POR INDUCCION Y FORMULA DE NEWTON

Consideremos nuevamente una sucesión cualquiera $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Ya hemos definido la suma de los primeros n elementos de esa sucesión cualquiera sea el número natural n.

Análogamente vamos a definir el producto de los n primeros términos de dicha sucesión cualquiera el natural n, producto que vamos a indicar en cualquiera de las siguientes formas:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \text{ ó } a_1.a_2\ldots a_n$$

Como hay que hacerlo para todo natural n, la definición será naturalmente por inducción. Definimos primero para $n = 1$:

$$\prod_{k=1}^{1} a_k = a_1$$

y luego, supuesto que ya lo tenemos definido para un cierto n, definimos:

$$\prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) . a_{n+1}$$

Así, por ejemplo,

$$\prod_{k=1}^{2} a_k = \left(\prod_{k=1}^{1} a_k\right) . a_2 = a_1 . a_2$$

$$\prod_{k=1}^{3} a_k = \left(\prod_{k=1}^{2} a_k\right) . a_3 = (a_1 . a_2) . a_3 = a_1 . a_2 . a_3$$

$$\prod_{k=1}^{4} a_k = \left(\prod_{k=1}^{3} a_k\right) . a_4 = (a_1 . a_2 . a_3 .) \, a_4 =$$

$$= a_1 . a_2 . a_3 . a_4 \text{, etc.}$$

Por ejemplo, si $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, es la sucesión "constante", es decir si $a_n = b$ para todo n natural (en cuyo caso la sucesión es $b, b, \ldots, b, \ldots$) entonces:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = b^n$$

(lo cual rescata el sentido original de b^n: el producto de b por sí mismo n veces; lo que ocurre es que ahora ya le hemos dado sentido preciso a la expresión "producto de n números" cualquiera sea el natural n).

Ahora vamos a dar dos definiciones que nos serán de utilidad enseguida. La primera de ellas es la de *factorial* de un número natural n, lo que indicaremos como $n!$, que significa el producto de todos los números naturales desde 1 hasta n. Más precisamente:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

o, si el lector prefiere la otra notación:

$$n! = 1 . 2 . 3 \ldots n$$

Así, por ejemplo:

$$1! = 1$$
$$2! = 1.2. = 2$$
$$3! = 1.2.3. = 6$$
$$4! = 1.2.3.4 = 24$$
$$5! = 1.2.3.4.5 = 120, \text{ etc.}$$

Es muy fácil probar la siguiente propiedad del factorial:

$$(n+1)! = n! . (n+1) \qquad (*)$$

pues es :

$$(n+1)! = \prod_{k=1}^{n+1} k = \left(\prod_{k=1}^{n} k\right) . (n+1) = n! \, (n+1).$$

Resulta útil definir también $0!$ Lo que debe valer es inmediato si queremos que siga valiendo la propiedad (*) para $n = 0$, pues debería ser $(0 + 1)! = 0! \, (0 + 1)$, o sea $1 = 0! \, . \, 1$, de donde

$$0! = 1$$

La segunda definición que queremos dar es la de *número combinatorio.*

Dado un número natural n y un número $k \leq n$ ($k = 0$ ó k natural) definimos el "número combinatorio n, k" como:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \, (n-k)!}$$

¿Por qué darle nombre a este número estrafalario? El motivo es el siguiente: supongamos tener n elementos, digamos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, y que queremos formar conjuntos tomando k de esos elementos, por ejemplo el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ o el conjunto $\{a_2, a_3, \ldots a_k, a_{k+1}\}$ ó $\{a_1, a_2, a_4, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$, etc.

¿Cuántos de esos conjuntos podemos formar? Pues exactamente $\binom{n}{k}$ conjuntos como lo muestra el siguiente argumento: para elegir el primer elemento del conjunto, tenemos n posibilidades, podemos elegir a_1 ó a_2 o cualquier otro.

Una vez fijado el primer elemento, para fijar el segundo elemento tenemos $n - 1$ posibilidades, todas menos la que ya hemos elegido. Entonces para fijar el primer y segundo elementos tenemos en total $n\,(n-1)$ posibilidades.

Ahora tenemos $n - 2$ posibilidades para fijar el tercer elemento, así que para fijar *los tres* primeros tenemos $n\,(n - 1)\,(n - 2)$ posibilidades. Así siguiendo, cuando lleguemos al **k-ésimo** elemento nos quedarán, ya que hasta ese momento fijamos $k - 1$ de ellos, $n - (k - 1) = n - k + 1$ posibilidades. Número total de posibilidades: $n\,(n - 1)\,(n - 2) \ldots (n - k + 1)$.

Pero atención, que cada conjunto lo estamos contando varias veces.

Por ejemplo, de acuerdo a cómo hemos contado, una posibilidad es elegir primero a_1, después a_2, después a_3, etc., hasta llegar a a_k y otra posibilidad es elegir primero a_2, después a_1, luego a_3 y después seguir en orden hasta llegar a a_k. Los conjuntos que nos quedaron en este ejemplo son:

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\} \qquad (1)$$

$$\{a_2, a_1, a_3, \ldots, a_n\} \qquad (2)$$

Ahora bien, esos dos conjuntos *como conjuntos son iguales*, tienen los mismos elementos no importa en qué orden los hayamos colocado. Quiere decir que en nuestro número total de posibilidades, que era $n(n - 1)\,(n - 2) \ldots (n - k + 1)$, estamos contando de más, estamos considerando como distintas a posibilidades que, como (1) y (2), son la misma.

La pregunta es entonces ¿cuántas veces hemos contado a cada posibilidad? O dicho de otra forma: ¿en cuántas formas podemos por ejemplo reordenar el conjunto (1)?

Aplicamos un argumento idéntico al ya usado: para decidir quién es el primer elemento tenemos k posibilidades, a_1 ó a_2 o cualquiera hasta a_k.

Una vez elegido el primero, para elegir el segundo nos quedan $k - 1$ posibilidades (todas menos la elección hecha para el primero). Así siguiendo, vemos que el conjunto (1) se puede ordenar de $k\,(k - 1) \ldots 2.1$ formas (acá en el producto regresivo llegamos hasta 1: si elegimos $k - 1$, el último elemento debe ser el único que queda).

Pero ese número es justamente lo que habíamos llamado $k!$ En resumen, había $n\,(n - 1) \ldots (n - k + 1)$ posibilidades, pero esas posibilidades las dividimos en grupos de $k!$ posibilidades de tal forma que en cada grupo todas las posibilidades son una sola. El número verdadero de posibilidades es entonces:

$$\frac{n\,(n-1) \ldots (n-k+1)}{k!}$$

Este número no cambia si multiplicamos numerador y denominador por $(n - k)!$ Hagámoslo:

$$\frac{n\,(n-1) \ldots (n-k+1)\,(n-k)!}{k! \; (n-k)!} =$$

$$\frac{n\,(n-1) \ldots (n-k+1)\,(n-k)\,(n-k-1) \ldots 2.1}{k! \; (n-k)\,!}$$

$$= \frac{n!}{k! \; (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

que es el resultado prometido.

Si el lector no es de los que se rinden fácilmente, preguntará para qué quiere saber cuántos conjuntos de k elementos puede formar si esos k elementos los elige de entre n prefijados. Lo cual nos lleva dere-

cho al último tema de este parágrafo que es la *fórmula de Newton.*

Es bien conocida la fórmula:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

y también es conocida la fórmula:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Si uno se pone a trabajar encontrará la fórmula para $(a+b)^4$ (multiplicando $a+b$ por sí mismo 4 veces), $(a+b)^5$, etc. Pero sería bueno disponer de una fórmula que nos dijese cuánto vale $(a+b)^n$ cualquiera sea el número natural n. Un poco de razonamiento y dispondremos de ella:

Para calcular $(a+b)^n$ hay que multiplicar $a+b$ por sí mismo n veces:

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b) \text{ (n veces)}$$

Este producto se efectúa aplicando la propiedad distributiva y juntando los factores que tengan la misma potencia en a y la misma potencia en b. ¿Cuántos de estos factores aparecen?

Desde ya que si a aparece elevado a la k, b debe aparecer elevado a la $n-k$ por que cada multiplicación consta de n factores. Entonces cada término que aparece al distribuir tiene la forma:

$$a^k\, b^{n-k}$$

Nuevamente ¿Cuántos de estos términos hay? Numeremos los factores

$$\underbrace{(a+b)}_{F_1}\underbrace{(a+b)}_{F_2}\dots\underbrace{(a+b)}_{F_n}$$

Al multiplicar a del F_1 por a del $F_2, \dots,$ por a del F_k y después por b del F_{k+1}, b del $F_{k+2}, \dots,$ b del F_n, obtenemos $a^k\, b^{n-k}$. Podemos ver que basta decir de qué k factores se tomó el a para multiplicar, para saber que de los $n-k$ restantes hay que tomar el b para multiplicar; nos concentramos entonces en ver de cuáles factores se tomó el a para multiplicar.

Hay varias posibilidades: tomarlo de $F_1, F_2, \dots, F_k$ como indicamos antes, o de $F_2, F_3, \dots, F_k, F_{k+1}$ etc.

Quizás el lector está adivinando que hay tantas maneras de conseguir $a^k\, b^{n-k}$ como maneras haya de elegir k factores entre $F_1, F_2, \dots, F_n$. Pero es justamente $\binom{n}{k}$ según argumentamos antes. Luego al hacer todos los productos posibles nos aparecerá:

$$\binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

Y esto para todos los valores posibles de k. Ya estamos en condiciones de conjeturar la siguiente fórmula:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2$$

$$+ \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

o, en forma más compacta y precisa:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

que es la famosa fórmula de Newton. Ya la hemos conjeturado; ahora probémosla:

TEOREMA 1.13.

(FORMULA DE NEWTON)

Si a y b son números reales cualesquiera, entonces para todo número natural n vale:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

Demostración: Por inducción desde luego; para $n = 1$ el primer miembro es $a + b$ mientras que el segundo es:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 b^{1-0} + \binom{1}{1} a^1 b^{1-1} =$$

$$= b + a$$

así que para $n = 1$ la fórmula es verdadera.

Supongamos que la fórmula es verdadera para un cierto natural n; entonces:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n =$$

$$= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} =$$

$$= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} +$$

$$+ b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} +$$

$$+ \binom{n}{k} a^{n+1} b^0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} +$$

$$+ \binom{n}{k} a^0 b^{n+1}.$$

Llamando $h = k+1$ en el primer sumando obtenemos:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h-1} a^h b^{n-(h-1)} + a^{n+1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a\ b^{n-k+1} + b^{n+1}.$$

Lo llamemos h, lo llamemos k, da lo mismo:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{h=1}^{n} a_h.$$

Luego:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n-k+1} +$$

$$+ b^{n+1}.$$

Es fácil verificar la igualdad:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Resulta entonces:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

(pues para $k = 0$ se obtiene b^{n+1} y para $k = n+1$ se obtiene a^{n+1}).

Luego la fórmula de Newton, supuesta cierta para n, es cierta para $n+1$, con lo cual es cierta para todo número natural. ///

EJERCICIOS

1

Probar que si n es natural y k es natural, $k \leq n$, entonces:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

2

Probar que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ *para todo natural* n.

3

Probar que $\binom{n}{k}$ es siempre un número natural [Usar el ejercicio 1 y el Principio de inducción "fuerte," ejercicio 2 de parágrafo 1.3.)].

4

Desarrollar $(a+b)^3$ *y* $(a+b)^4$ *usando la fórmula de Newton.*

5

Probar que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

6

Probar que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ para n natural y $k \leq n$.

1.6. NUMEROS ENTEROS

Los números enteros son los números naturales 1, 2, 3, 4, etc, y además 0 y $-1, -2, -3$, etc.
Con más precisión:

DEFINICION 1.14.

Un número real m se dice que es un *número entero* si satisface una (y sólo una) de las tres siguientes condiciones:

- i) $m \in N$.
- ii) $m = 0$.
- iii) $m = -n$, para algún número natural n.

El conjunto de los números enteros se indicará por Z.
En otras palabras, los números enteros son los naturales además de sus inversos aditivos y del 0.

****

PROPOSICION 1.15.

Si a y b son números enteros, entonces
$a+b$, ab y $a-b$.
también son números enteros.

Demostración: Veamos primero que $a+b$ es un número entero. Como a y b tienen tres posibilidades cada uno, tenemos que considerar nueve posibilidades para la suma. Hacemos la demostración en algunos de esos casos y los restantes quedarán como ejercicios.

- 1. $a \in N, b \in N$.

En este caso $a+b \in N$ por Proposición 1.5. del parágrafo 1.2.
Luego $a+b \in Z$

- 2. $a \in N, b = 0$.

En este caso, $a+b = a+0 = a \in N \subset Z$.

- 3. $a \in N, b = -n$ con $n \in N$.

Entonces $a+b = a-n$; hay tres posibilidades:

- i) $a > n$.

Aquí es $a-n \in N$ por Proposición 1.8. del parágrafo 1.2. luego $a-n \in Z$.

- ii) $a = n$.

Aquí es $a-n = 0 \in Z$.

- iii) $a < n$.

Aquí $a-n = -(n-a)$ y como $n-a \in N$ por Proposición 1.8., entonces $a-n$ es el inverso aditivo de un número natural (de $n-a$) y por lo tanto $a-n \in Z$.

- 4. $a = -n, b = -m$ para n y m naturales (Ejercicio).
- 5. $a = -n$, $b \in N$ para n natural (Es igual al caso 3).
- 6. $a = -n$, $b = 0$ para n natural (Ejercicio).
- 7. $a = 0, b \in N$ (Igual al caso 2).
- 8. $a = 0, b = 0$ (Ejercicio).
- 9. $a = 0, b = -n$ para n natural (Ejercicio).

Las demostraciones de las otras propiedades, $ab \in Z$ y $a-b \in Z$, se dejan también como ejercicio.///

Una noción que vamos a necesitar en el parágrafo siguiente es la divisibilidad que pasamos a definir.

Si a y b son números enteros, y $a \neq 0$ decimos que a *divide* a b, y escribimos $a|b$, si existe otro número entero m tal que:

$$b = m \, . \, a$$

(En otras palabras, a divide a b si la división b/a es "exacta")

Si a y b son naturales y a divide a b, entonces es $a \leq b$. En efecto, al ser $b = m.a$ para algún entero m, como a y b son positivos, lo mismo debe ocurrir para m. Pero un entero positivo es un número natural; luego $m \geq 1$ por la Proposición 1.6. y entonces:

$$b = m \, . \, a \geq 1 \, . \, a = a$$

Ya sea que a divida a b o no, el lector habrá aprendido en su momento las "instrucciones" para hacer la división entre b y a, lo que equivalía a hallar un cociente q y un resto r. Esto lo habrá visto escrito en la forma:

$$\begin{array}{l|l} b & a \\ \hline r & q \end{array}$$

Esta disposición significa que $a.q+r = b$. Pero hallar cociente y resto no es simplemente encontrar dos números q y r que verifiquen $a.q+r = b$; pues eso se consigue ya en el primer paso de la división y se sigue dividiendo hasta llegar a un resto que "no se pueda" dividir. Y esto último significa *que r sea menor que* a.

Las "instrucciones" para dividir b por a permiten adivinar que siempre se pueden encontrar q y r con esas dos propiedades; olvidándonos de las instrucciones, probamos ahora que eso ocurre efectivamente:

TEOREMA 1.16.

(ALGORITMO DE DIVISION EN Z)

Si a y b son números enteros y $a > 0$ (o sea, a es natu-

ral), entonces existen *únicos* números enteros q y r que satisfacen las propiedades:

- i) $b = a \cdot q + r$.
- ii) $0 \leqslant r < a$.

Demostración: Notemos que este Teorema afirma dos cosas: que existen q y r que satisfacen i) y ii) y además que son *únicos*. Dividimos entonces la demostración en dos partes.

Consideremos el siguiente conjunto:

$$H = \{b - a \cdot q : q \in \mathbb{Z} \text{ y } b - a \cdot q \geqslant 0\}$$

o sea, formemos todos los números posibles de la forma $b - aq$ (a y b son fijos y todos esos números se obtienen dándoles diversos valores a q) que sean mayores o iguales que cero. Ese conjunto es no vacío (por ejemplo, para $q = |b|$, resulta $b - a.q \in H$).

Si $0 \in H$, o sea si una de esas combinaciones es cero, digamos $b - aq = 0$ para un cierto q, entonces ese mismo q y $r = 0$ satisfacen i) y ii).

Si $0 \notin H$, entonces $H \subset \mathbb{N}$ pues $b - aq$ es siempre entero (Proposición 1.15.), es $\geqslant 0$ y, como no es 0, es un entero positivo, o sea un natural. Al ser $H \subset \mathbb{N}$, por el Principio de Buena Ordenación (Teorema 1.10), H tiene un mínimo; llamemos r a ese mínimo. Como es un elemento de H (por definición de mínimo) entonces es:

$$r = b - aq$$

para un cierto q. Ya tenemos entonces q y r que cumplen i).
Veamos que r satisface ii).

Si no fuese así, sería $r \geqslant a$. Luego $r - a \geqslant 0$ y además:

$$r - a = b - aq - a = b - a(q + 1)$$

Luego $r - a \in H$ y además $r - a < r$ (recordar que $a > 0$), lo cual contradice el hecho de que r sea el mínimo de H.

En definitiva, resulta $0 \leqslant r < a$, o sea los q y r encontrados satisfacen i) y ii).

Veamos ahora la segunda parte del Teorema, o sea que no hay *otros* q y r que satisfagan i) y ii). Supongamos entonces que q_1 y r_1 son enteros tales que:

$$b = a q_1 + r_1$$
$$0 \leqslant r_1 < a$$

Entonces es:

$$aq + r = aq_1 + r_1$$

de donde:

$$a(q - q_1) = r_1 - r$$

Esto dice que a divide a $r_1 - r$. Si suponemos $r_1 > r$, entonces según vimos, $a \leqslant r_1 - r$. Pero como $r \geqslant 0$, $r_1 - r \leqslant r_1 < a$, así que no puede ser $r_1 > r$.

Análogamente vemos que no puede ser $r_1 < r$. Luego $r_1 = r$ y de $a(q - q_1) = r_1 - r = 0$, obtenemos (pues a no es cero), $q - q_1 = 0$, luego $q = q_1$. Esto muestra que q y r son únicos y termina de probar el Teorema. ///

Como aplicación de este Teorema, veamos un hecho que es de dominio público. Un número entero m se dice que es *par* si es divisible por 2, es decir si $2|m$, y se dice que es *impar* si no es divisible por 2. La forma que tienen los números pares resulta inmediatamente: si $2|m$, entonces

$$m = 2k, \quad \text{para algún entero } k,$$

y todo número de la forma 2k para $k \in \mathbb{Z}$ es un número par.

¿Qué pasa con los impares?

Si m es impar, por el Teorema anterior se podrá escribir:

$$m = 2k + r \quad \text{con} \quad 0 \leqslant r < 2$$

Luego es $m = 2k + 0 = 2k$ ó $m = 2k + 1$. El primer caso no puede suceder pues implicaría que m es divisible por 2. Luego debe ser $m = 2k + 1$ para algún entero k. Recíprocamente, si m es de la forma $2k + 1$, entonces no puede ser de la forma $2k'$ para algún otro entero k' por la unicidad de cociente y resto demostrada recién. Entonces m es impar. En definitiva:

Números pares $\longleftrightarrow$ de la forma $2k$ $(k \in \mathbb{Z})$
Números impares $\longleftrightarrow$ de la forma $2k + 1$ $(k \in \mathbb{Z})$

Sea ahora m un número par; entonces $m = 2k$ para un cierto $k \in \mathbb{Z}$. Si también k es par, $k = 2k'$, entonces será $m = 2^2 k'$. Si seguimos analizando k', etc, nos damos cuenta de que va a llegar un momento en que el factor en cuestión (k', k'' o el que fuera) va a ser impar y ahí el proceso para.

Aunque darse cuenta es fácil, demostrar este hecho a partir de las propiedades básicas enunciadas al principio de este capítulo requiere un poco de trabajo.

En primer término, por la desigualdad de Bernoulli (Proposición 1.12) es:

$$2^m = (1 + 1)^m \geqslant 1 + m.1 = 1 + m > m$$

con lo cual no puede ser que $2^m | m$ (en ese caso sería $2^m \leqslant m$ según vimos). Consideremos entonces el conjunto:

$$A = \{ p \in \mathbb{N}: 2^p \text{ no divide a } m \}$$

Este conjunto esta incluido en N por su definición y es no vacío (acabamos de ver que $m \in A$). Luego, por el Principio de Buena Ordenación (Teorema 1.10), A tiene un mínimo. Sea:

$$q = \text{mín } A$$

y sea:

$$t = q - 1$$

Entonces 2^q no divide a m pero 2^t sí (si así no fuese sería $t \in A < \text{mín } A$, absurdo).

Luego será:

$$m = 2^t k$$

y k debe ser impar: si $k = 2k'$, será $m = 2^t . 2^k =$

$= 2^{t+1} . k' = 2^q k'$ o sea $2^q | m$.

En definitiva, hemos mostrado que si m es par existe $t \in \mathbb{N}$ y k impar tal que $m = 2^t k$. Usaremos este hecho en el próximo parágrafo.

Para terminar con los números enteros, veamos cómo se define la potencia de exponente entero. La guía para nuestra definición será que la Proposición 1.11 siga siendo válida cuando m y n son enteros.

En primer lugar, definimos a^0. Si vale a) de 1.11, entonces será:

$$a^0 . a^n = a^{0+n} = a^n$$

y, si $a \neq 0$, multiplicando por $(a^n)^{-1}$ (que también es distinto de 0):

$$a^0 = 1.$$

Por lo tanto estamos obligados a definir a^0 como 1 para $a \neq 0$.

Definimos ahora a^{-n} para $n \in \mathbb{N}$. Siempre sobre la base de a) de 1.11, deberá ser:

$$a^{-n} . a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1,$$

y por tanto:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = (a^n)^{-1}.$$

Nuevamente para que valga la Proposición 1.11 cuando m y n son enteros, estamos obligados a definir a^{-n} como $(a^n)^{-1}$.

EJERCICIOS

1

Probar en detalle la Proposición 1.15.

2

Probar que si m es par, m^2 es par y que si m es impar, m^2 es impar.

3

Probar que el resto de dividir m^2 por 3 es siempre 0 ó 1.

4

Probar que con las definiciones $a^0 = 1$ y $a^{-n} = (a^n)^{-1}$ resulta:

- a) $a^{n+m} = a^n . a^m$ para todos los enteros m y n $(a \neq 0)$
- b) $(a^n)^m = a^{n.m}$, para todos los enteros m y n $(a \neq 0)$.

(SUGERENCIA: considerar todos los casos posibles para m y n como en 1.15).

5

Si a es un número real mayor que 1, probar que si m y n son enteros y $m < n$, entonces $a^m < a^n$. ¿Qué pasa si $0 < a < 1$? (Considerar $1/a$ en este último caso).

6

Probar que si $m \in Z$ *y* $n \in N$ *es tal que* $n \mid m$, *entonces existe* $t \in N$ *tal que* n^t *divide a* m *y* n^{t+1} *no divide a* m.

1.7. NUMEROS RACIONALES

DEFINICION 1.17.

Un número real a se dice que es un *número racional* si existen números enteros p y q tales que:

$$a = \frac{p}{q}$$

(o sea, $a = p . q^{-1}$; naturalmente, $q \neq 0$).

El conjunto de los números racionales se indicará Q.

De otra forma, un número real es racional cuando se puede escribir como un cociente de enteros.

La siguiente Proposición prueba una propiedad elemental de las operaciones entre números racionales, mostrando al mismo tiempo cómo se realizan esas operaciones.

PROPOSICION 1.18.

Sean a y b números racionales. Entonces:

$$a+b,\ a.b,\ a-b \text{ y } a/b$$

(en el último caso si $b \neq 0$) son también números racionales.

Demostración: Como a y b son racionales, entonces existen enteros p, q, s y t tales que:

$$a = \frac{p}{q}, \quad b = \frac{s}{t}.$$

Entonces:

1) $a + b = \frac{p}{q} + \frac{s}{t} = p.q^{-1} + s.t^{-1} =$

$= p\,t\,t^{-1} q^{-1} + s\,q\,q^{-1}\,t^{-1} =$

$= p.t\,q^{-1}\,t^{-1} + s\,q\,q^{-1}\,t^{-1} =$

$= pt\,(qt)^{-1} + sq\,(qt)^{-1} =$

$= (pt + sq)\,(qt)^{-1} =$

$= \frac{pt + sq}{qt}$.

y como tanto el numerador como el denominador son números enteros (Proposición 1.), entonces $a + b$ es cociente de enteros, o sea $a + b$ es racional.

2) $a . b = \frac{p}{q} . \frac{s}{t} = p . q^{-1} . s . t^{-1} =$

$= ps\,q^{-1} t^{-1} = ps\,(qt)^{-1} = \frac{ps}{qt}$.

luego $ab \in Q$.

3) Observemos que:

$$-b = -\frac{s}{t} = -(s . t^{-1}) = (-s).t^{-1} = \frac{-s}{t}.$$

Luego $-b \in Q$ y entonces $a - b = a + (-b)$ pertenece a Q por 2).

4) $\frac{a}{b} = a . b^{-1} = p . q^{-1} . (st^{-1})^{-1} =$

$= p . q^{-1} . s^{-1} (t^{-1})^{-1} = pq^{-1} s^{-1} t =$

$= pt\,q^{-1}\,s^{-1} = \frac{pt}{qs} \in Q$ ///

Naturalmente, todo número entero m es un número racional ya que $m = \frac{m}{1}$. Entonces tenemos las inclusiones:

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

La Proposición anterior tiene una consecuencia muy sencilla de demostrar y es que entre dos números racionales hay siempre otro número racional. Más precisamente:

PROPOSICION 1.19.

Si a y b son números racionales tales que $a < b$, entonces $\frac{a+b}{2}$ también es racional y además:

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

Demostración: Que $\frac{a+b}{2}$ sea racional es inmediato a partir de la Proposición anterior. Por otra parte, como $a < b$ es:

$$2a = a + a < a + b$$

luego:

$$2a < a + b, \text{ o sea } a < \frac{a+b}{2}$$

Análogamente:

$$a + b < b + b = 2b$$

luego:

$$a + b < 2b, \text{ o sea, } \frac{a+b}{2} < b \ ///$$

Es fácil convencerse, a partir de esta Proposición, de que entre dos números racionales hay *infinitos* números racionales. Pues entre a y b hay uno que es $\frac{a+b}{2}$, entre a y $\frac{a+b}{2}$ hay otro que es $\frac{1}{2}(a + \frac{a+b}{2})$, etc. Reiterando este procedimiento, nos damos cuenta de la verdad de la afirmación hecha.

No se nos pida aquí una demostración de este hecho a partir de las propiedades básicas, ya que el concepto de "infinito" usado ha sido intuitivo. Es quizás sorprendente la precisión que se le puede dar a ese concepto, cosa que haremos en el próximo capítulo.

EJERCICIOS

1

a) Probar que un número racional $a = \frac{p}{q}$ $(p, q \in Z)$ es entero si y sólo si $q \mid p$.

■ b) Decir cuáles de los siguientes números son enteros y cuáles no (y probarlo)

$$\frac{1}{2};\frac{4}{2};\ \frac{3}{7};\frac{5}{3};\frac{3}{6}.$$

2

Probar que si $a \in Q$ y $a \neq 0$, entonces $a^m \in Q$ para todo $m \in Z$.
(Hacerlo primero para $m \in N$ y después considerar casos).

3

★ a) Probar que todo número racional se puede escribir como el cociente de un número entero por un número natural.

★ b) Sean $a = \frac{p}{q}$ y $b = \frac{s}{t}$ escritos según a).
(o sea $p, s \in Z$, $q, t \in N$).
Probar que $a < b$ si y solo si $pt < qs$.

★ c) Dar un ejemplo de números racionales $a = \frac{p}{q}$ y $b = \frac{s}{t}$ (con p, q, s y t en Z) tales que $a < b$ pero $pt > qs$.

4

● a) *Calcular:*

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{5},\ \frac{-1}{4}\cdot\left(\frac{-5}{3}\right),\quad \frac{2/5}{3/4}.$$

● b) *Probar que* $\frac{pt}{qt} = \frac{p}{q}$ *cualesquiera sean* $p, q, t \in Z$.

1.8. PROPIEDAD DE COMPLETITUD

Recordamos al lector que en el parágrafo 1.2. habíamos dado una lista de 13 propiedades básicas de los números reales y habíamos dicho que faltaba una propiedad para que dicha lista fuese completa (es decir, para que con solamente esas propiedades podamos deducir todas las demás). En este parágrafo vamos a indicar cual es la propiedad restante, para lo cual necesitamos introducir algunas nociones previas.

Antes de entrar propiamente en tema, hablemos de la representación de los números reales en una recta.

El lector probablemente habrá visto alguna vez que si sobre una recta fijamos arbitrariamente un punto como **0** y otro como **1**, eso nos permite pensar en cada número real como en un punto de la recta. Es costumbre tomar una recta horizontal y fijar el **1** a la derecha del **0**:



Para saber donde se representa un número racional $\frac{m}{n}$, se divide el segmento que va del **0** al **1** en **n** partes iguales (de longitud $\frac{1}{n}$ cada una) y luego se avanza, a partir del **0**, **m** pasos a la derecha y ahí se fija el número $\frac{m}{n}$. Esto si **m** y **n** son positivos.

Si el número racional es negativo, se puede escribir como $-\frac{m}{n}$ con **m** y **n** naturales y entonces se repite el mismo procedimiento pero avanzando hacia la izquierda.

Para representar a los restantes números reales (los que no sean racionales) se utiliza un procedimiento de aproximación que no vamos a describir por ahora.

Uno se podría preguntar si el hecho de poder representar los números reales sobre una recta de manera de cubrirla completamente es una propiedad básica o derivada del conjunto de los números reales.

La respuesta es muy sencilla: ni una cosa ni la otra. Y esto por dos razones: la primera es que el concepto de "recta" utilizado no ha sido precisado, todo el mundo sabe qué es una recta pero nadie sabe cómo definirla (lo cual no es tan raro: trate de definir "amargo").

Y al no poder definir una recta, mal podremos demostrar, en forma rigurosa, que podemos representar a los números reales sobre ella. Por lo tanto, este hecho no podrá ser una propiedad derivada.

Y la segunda razón es que, para demostrar propiedades de los números reales, *no necesitamos apelar a ese hecho*, con lo cual no la necesitamos como propiedad básica.

¿La abandonamos entonces? No, de la misma forma que no dejamos de usar la palabra "amargo" porque no sepamos definirla. Vamos a utilizar frecuentemente dicha representación, más aún, el libro estará lleno de dibujos que la suponen.

Pero, y este pero es muy importante, *jamás aparecerá como parte de una demostración*, podrá ilustrar la demostración, podrá hacer entender mejor la demostración, más aún, podrá *sugerir* una demostración, pero la demostración misma sólo se basará, en última instancia, en las propiedades básicas de los números reales y nunca en la posibilidad de representarlos en una recta.

Una vez entendido el papel de ayuda de la representación de R en una recta, pasamos al tema de este parágrafo. Comenzamos dando algunas definiciones:

DEFINICION 1.20.

Sea A un conjunto cualquiera de números reales, es decir $A \subset R$.

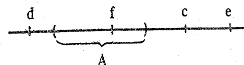
Un número real c se dice *cota superior de* A si tiene la siguiente propiedad:

Para todo $a \in A$ vale $a \leqslant c$

O sea, un número real es cota superior de un conjunto cuando es mayor o igual que *todos* los elementos del conjunto.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

En términos de la representación de los números reales en una recta recién discutida, que un número sea cota superior de un conjunto significa que está *a la derecha* del conjunto. Por ejemplo, en el dibujo de abajo, c y e son cotas superiores de A mientras que d y f no lo son:



Veamos más ejemplos; supongamos que a y b son números reales cualesquiera tales que $a < b$ y definamos:

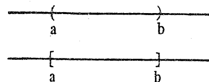
$$(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$$

(Intervalo "abierto" (a, b))

$$[a, b] = \{x \in R : a \leqslant x \leqslant b\}$$

(Intervalo "cerrado" [a, b])

a los que gráficamente representamos de la siguiente manera:



Entonces, por ejemplo, $b+1$ es cota superior de estos dos conjuntos. En efecto, si $x \in (a, b)$, entonces $a < x < b$ y como $b < b+1$, entonces $x < b+1$, luego $b+1$ es mayor que todos los elementos de (a, b).

Mismo razonamiento si $x \in [a, b]$.

También $b+2$, $b+\frac{1}{2}$, $b+\frac{3}{7}$, etc. son cotas superiores de los dos conjuntos. Pero hay una cota superior de los dos conjuntos que tiene una particularidad muy importante; esta cota superior es el mismo b.

Efectivamente es una cota superior: si $x \in [a, b]$, por ejemplo, entonces $a \leqslant x \leqslant b$, en particular $x \leqslant b$; y ésta es la condición para ser cota superior. La particularidad a la que nos referimos es la siguiente: si se toma un número menor que b, entonces es claro a partir de la representación geométrica que ese número *no puede ser cota superior* de $[a, b]$.

Para probarlo, sea $c < b$; si $c < a$, entonces c no es cota superior de $[a, b]$ pues no es mayor o igual que a; si $a \leqslant c < b$, consideremos un número real d que esté entre c y b (siempre existe uno; por ejemplo $d = \frac{c+b}{2}$)



Entonces $a \leqslant c < d < b$, luego $d \in [a, b]$; si c fuese cota superior de $[a, b]$, c tendría que ser mayor o igual que *todos* los elementos de $[a, b]$, en particular c tendría que ser mayor o igual que d, cosa que no ocurre.

¿Cuál es entonces la propiedad que tiene b como cota superior? Pues la de que no hay cotas superiores menores que b.

Puesto de otra manera, b es la *menor cota superior*. Este tipo de cotas superiores es tan importante en el Análisis, que se les da un nombre:

DEFINICION 1.21.

Sea $A \subset R$; un número real c se dice *supremo* de A y se escribe $c = \sup A$ si tiene las dos siguientes propiedades:

S_1) c es cota superior de A

S_2) si d es cota superior de A, entonces $c \leqslant d$ (esto expresa que c sea la *menor* de las cotas superiores).

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

La discusión anterior a la definición prueba que b es el supremo de $[a, b]$; una discusión análoga prueba que b también es el supremo de (a, b).

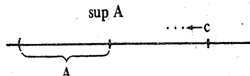
Una pregunta natural que nos podemos hacer es si todo subconjunto A de R tendrá supremo. La respuesta es negativa: para tener supremo, en particular hay que tener cota superior (pues el supremo es, en particular, una cota superior) y hay conjuntos en R que *no* tienen cota superior.

Por ejemplo, si tomamos $A = R$ entonces A no tiene cota superior; pues si c fuese una cota superior de $A = R$, sería $x \leqslant c$ para todo $x \in R$, o sea no habría números reales mayores que el número real c.

Pensando en la representación de los reales en la recta, es obvio que hay puntos en la recta a la derecha de c, sea quien sea c, pero como habíamos prometido no usar dicha representación en las demostraciones, observamos que por O_3 es $c < c+1$ (ya que $0 < 1$) y por lo tanto no es $x \leqslant c$ para todo $x \in R$ (por lo menos para $x = c+1$ es falso).

¿Y si A tiene una cota superior, o como se dice habitualmente, si A es *acotado superiormente*? Salvo un caso (el caso en que A sea el conjunto vacío, $A = \phi$), sí es cierto que A tiene supremo si A es acotado superiormente.

Para convencernos de ello, pensemos en que el hecho de que A esté acotado superiormente significa que, en la recta, A está a la izquierda de un cierto número c. Ahora ese número c lo hacemos viajar a la izquierda hasta que se "tropiece" con A, ahí donde tropiece estará el supremo (la recta no tiene "agujeros"):



Esto no es una demostración desde luego; ni vamos a dar ninguna otra. Tomaremos este hecho como una propiedad *básica* de R y será la 14° que nos faltaba:

PROPIEDAD DE COMPLETITUD

Si A es un conjunto de números reales, $A \subset R$, *no vacío* y A es acotado superiormente, entonces existe:

$$c = \sup A$$

En un ejemplo que vimos antes, $A = (a, b)$, el supremo era b, que no pertenece a A. En el otro ejemplo, $A = [a, b]$, el supremo era también b, que sí pertenece a A.

En general, entonces, el supremo puede o no pertenecer al conjunto; en el caso en que pertenece al conjunto se lo llama *máximo* en lugar de supremo.

Todo el tiempo hemos estado hablando de *el* supremo, lo cual supone que un conjunto A no puede tener más de un supremo. En efecto, si c_1 y c_2 son supremos de A, entonces por ser c_1 cota superior y ser c_2 la menor cota superior, $c_2 \leqslant c_1$, y por ser c_2 cota superior y c_1 la menor cota superior, $c_1 \leqslant c_2$. Luego $c_1 = c_2$ y el supremo es único.

Hay una forma de caracterizar al supremo de un conjunto que resulta de mucha utilidad:

PROPOSICION 1.22.

Sea A un conjunto acotado superiormente y no vacío. Entonces un número real c es el supremo de A si y sólo si cumple las dos siguientes condiciones:

S'_1) c es cota superior de A,

S'_2) si ϵ es un número real arbitrario mayor que cero, entonces existe $a \in A$ tal que $c-\epsilon < a$.

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración: Supongamos primero que c es el supremo de A, o sea que c satisface S_1 y S_2.

Entonces c satisface S'_1 pues S'_1 es lo mismo que S_1. Para ver que c satisface S'_2, observemos que $c-\epsilon$ es menor que c. Siendo c el supremo, o sea la *menor* cota superior de A, entonces $c-\epsilon$ no puede ser cota superior de A. Eso es lo mismo que decir que no es cierto que $a \leqslant c-\epsilon$ para todo $a \in A$, que a su vez es lo mismo que decir que para algún $a \in A$ debe ser $c-\epsilon < a$.

Recíprocamente, supongamos que c satisface S'_1 y S'_2. Es inmediato que satisface S_1; supongamos que d es una cota superior de A. Si fuese $d < c$, entonces llamando $\epsilon = c-d > 0$, por S'_2 existiría $a \in A$ tal que $c-\epsilon < a$. Pero:

$$c-\epsilon = c-(c-d) = c-c+d = d$$

Luego existiría $a \in A$ tal que $d < a$, lo que contradice el carácter de cota superior de A que tiene d.

Luego debe ser $c \leqslant d$ y, en consecuencia, c satisface S_2. ///

Cambiando mayor por menor, obtenemos nociones y propiedades análogas:

DEFINICION 1.23.

Sea $A \subset R$; un número real d se dice cota *inferior* de A, si tiene la siguiente propiedad:

Para todo $a \in A$ es $d \leqslant a$.

Si A tiene una cota inferior, A se dice *acotado inferiormente.*

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

DEFINICION 1.24.

Sea $A \subset R$; un número real d se dice *ínfimo* de A (y se indica $d = \inf A$), si tiene las dos siguientes propiedades:

I_1) d es cota inferior de A.

I_2) si k es cota inferior de A, $k \leqslant d$ (o sea, d es la *mayor* cota inferior).

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

PROPOSICION 1.25.

Sea $A \subset R$ acotado inferiormente y no vacío. Entonces existe

$$d = \inf A$$

▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪

Demostración: Formamos el siguiente conjunto:

$$B = \{x \in R : x \text{ es cota inferior de } A\},$$

o sea, B es el conjunto de todas las cotas inferiores de A.

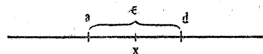
Ese conjunto es no vacío, pues A es acotado inferiormente (por lo cual existe alguna cota inferior de A); además es acotado superiormente: en efecto, como $A \neq \phi$, existe $a \in A$.

Cualquiera sea $x \in B$, x es cota inferior de A y, en particular, $x \leqslant a$, con lo que a es cota superior de B. Podemos aplicar entonces la Propiedad de completitud para concluir que existe

$$d = \sup B.$$

Afirmamos que este d es el ínfimo buscado de A. Para demostrarlo, observemos en primer término que $d \geqslant x$ para todo $x \in B$, o sea $d \geqslant x$ para toda cota inferior de A. Luego, si d fuese cota inferior, sería automáticamente la *mayor* cota inferior. Con lo cual todo lo que resta es probar que d es efectivamente cota inferior de A.

Supongamos que no es así; entonces existe $a \in A$ tal que $a < d$. Consideremos $\epsilon = d - a > 0$. Por la Proposición 1.22, como $d = \sup B$, existe $x \in B$ tal que $d - \epsilon < x$, o sea, $d - (d - a) < x$, es decir $a < x$. Pero $x \in B$ significa que x es cota inferior de A, en particular no puede ser $a < x$.



Entonces d tiene que ser cota inferior de A, lo cual termina de probar que $d = \inf A$ ///

Análogamente a lo que dijimos para supremo y máximo, si A tiene ínfimo, $d = \inf A$, y si $d \in A$, d se llama *mínimo* de A.

EJERCICIOS

1

Sean a y b números reales tales que $a < b$. Probar que $b = \sup (a, b)$, y que $a = \inf (a, b) = \inf [a, b]$

2

Probar que el conjunto vacío está acotado superiormente e inferiormente pero que no tiene ínfimo ni supremo (Sugerencia: probar que todo número real es cota superior e inferior de ϕ)

3

Decir cuáles de los siguientes conjuntos están acotados superiormente, cuáles inferiormente y cuáles son sus ínfimos y supremos si existen (probando todo):

- a) N
- b) Z
- c) Q.
- d) $A = \{x \in Z : -2 < x \leqslant 8\}$
- e) $A = \{x \in Q : \frac{1}{2} \leqslant x < 3\}$
- f) $A = \{x \in N : x < 10\}$

4

Sea A un conjunto acotado inferiormente, no vacío. Probar que un número real d es el ínfimo de A si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

I'_1) d es cota inferior de A.

I'_2) Para todo $\epsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a < d + \epsilon$.

5

Probar que si aceptamos la Proposición 1.25. como propiedad básica, entonces la Propiedad de completitud es una propiedad derivada (sugerencia: imitar la demostración de la Proposición 1.25. tomando $B = \{x \in R ; x \text{ es cota superior de } A\}$).

6

★ a) Probar que $\inf A \leqslant \sup A$ en caso de que ambos existan.

★ b) Probar que $\inf A = \sup A$ si y sólo si A es un conjunto de un solo elemento.

1.9. CONSECUENCIAS DE LA PROPIEDAD DE COMPLETITUD

En este parágrafo vamos a ver como la aceptación de la Propiedad de completitud tiene una serie de implicaciones. La primera de ellas es el hecho intuitivamente obvio de que los números naturales pueden ser tan grandes como uno quiera.

PROPOSICION 1.26.

(PRINCIPIO DE ARQUIMEDES)

Si a es un número real cualquiera entonces existe un número natural n tal que $n > a$.

▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪

Demostración: Si no fuese así, sería $n \leqslant a$ para todo número natural N. Pero eso es decir que N está acotado superiormente (por a); como $N \neq \phi$ (pues $1 \in N$) entonces existiría

$$c = \sup N$$

De acuerdo a la Proposición 1.22, dado $\epsilon > 0$ debe existir $n \in N$ tal que:

$$c - \epsilon < n$$

Consideremos $\epsilon = 1$ (ya que la propiedad anterior vale *cualquiera* sea $\epsilon > 0$).

Entonces existe $n \in N$ tal que:

$$c-1 < n$$

o sea:

$$c < n+1.$$

Pero N, por definición, es inductivo, así que $n+1 \in N$. Como $c = \sup N$, debe ser $c \geq n+1$. Con lo cual c resulta ser simultaneamente menor y mayor o igual que $n+1$. Eso no puede ser por tricotomía, con lo que N no puede tener supremo y, por lo tanto, no puede ser acotado superiormente. ///

COROLARIO 1.27.

Sean a y b números reales tales que $0 < a < b$. Entonces existe un número natural n tal que $n a > b$.

Demostración: Por el Principio de Arquímedes existe $n \in N$ tal que:

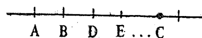
$$n > \frac{b}{a}.$$

Como $a > 0$, multiplicando por a se conserva la desigualdad:

$$na > b$$

lo cual prueba el Corolario ///

Este Corolario es, en realidad, el Principio de Arquímedes: éste supuso que si AB tiene longitud a y AC tiene longitud b con $a < b$, entonces por adición sucesiva de segmentos BD, DE, etc, de longitud a, se llega alguna vez a superar la longitud de AC:



COROLARIO 1.28.

Si ϵ es un número real mayor que 0, entonces existe un número natural n tal que:

$$\frac{1}{n} < \epsilon.$$

Demostración: Basta tomar $n > 1/\epsilon$ ///

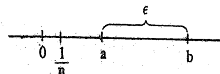
Hemos probado antes (Proposición 1.19) que entre dos números racionales siempre hay otro número racional y hemos dicho al pasar que entre dos números reales siempre hay otro número real (en ambos casos $\frac{a+b}{2}$). La siguiente Proposición prueba que entre dos números reales siempre hay un número racional:

PROPOSICION 1.29.

Sean a y b números reales tales que $a < b$. Existe entonces un número racional t tal que $a < t < b$.

Dem.: ★ i) Consideremos primero el caso en que $0 < a < b$. LLamemos:

$$\epsilon = b-a$$



y sea $n \in N$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$

Consideremos el conjunto:

$$A = \left\{p \in N : p.\frac{1}{n} > a\right\}$$

o sea, A es el conjunto de los naturales tales que, dando p saltos de longitud $\frac{1}{n}$ cada uno, nos pasamos de a. Como queremos pasarnos de a pero no de b (pues queremos un racional *entre* a y b), el p que consideremos no debe ser muy grande. Más precisamente, como $A \subset N$ y $A \neq \phi$ (por Corolario 1.27), existe, por buena ordenación:

$$m = \min A.$$

Afirmamos que el número $\frac{m}{n} = m.\frac{1}{n}$ está entre a y b. En efecto, es $\frac{m}{n} > a$ porque $m \in A$ (primera cosa que hay que cumplir para ser mínimo de A: pertenecer a A). Además es $\frac{m}{n} < b$ porque si fuese $\frac{m}{n} \geq b$, entonces:

$$(m-1).\frac{1}{n} = m.\frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \geq$$

$$\geq b - \frac{1}{n} > b-(b-a) = a$$

o sea, $(m-1).\frac{1}{n} > a$, con lo que $m-1 \in A$ Eso no puede ser ya que $m-1 < m$ y $m = \min A$. En definitiva:

$$a < \frac{m}{n} < b$$

y claramente $\frac{m}{n}$ es racional (ya que m y n son naturales).

Lo anterior era para el caso $0 < a < b$. Los restantes casos son sencillos:

★ ii) $a < 0 < b$.

En este caso, 0 es racional y está entre a y b.

★ iii) $a = 0 < b$.

En este caso, existe $n \in N$ tal que $\frac{1}{n} < b$. Como $\frac{1}{n} > 0 = a$ y $\frac{1}{n} \in Q$, queda probada la afirmación en este caso.

★ iv) $a < b = 0$.

Entonces $0 = -b < -a$. Por el caso iii) tenemos $n \in N$ tal que $\frac{1}{n} < -a$.

Luego $a < \frac{-1}{n} < 0 = b$ y $\frac{-1}{n} \in Q$.

★ v) $a < b < 0$.

Multiplicando por -1: $0 < -b < -a$. Por el caso i) podemos meter $\frac{m}{n}$ entre $-b$ y $-a$: $-b < \frac{m}{n} < -a$.

Multiplicando otra vez por -1:

$$a < \frac{-m}{n} < b$$

y como $\frac{-m}{n} \in Q$, esto termina de probar la Proposición ///

Como última consecuencia de la Propiedad de completitud, vamos a probar la existencia de raíces n-simas de cualquier número positivo para todo n natural.

PROPOSICION 1.30.

Sea a un número real positivo y sea n un número natural.

Existe entonces un *único* número *positivo* b tal que:

$$b^n = a.$$

Dicho b se indicará $\sqrt[n]{a}$ y se dirá "raíz n-sima de a".

Demostración: Dividimos la demostración en tres casos:

• i) $a > 1$

Consideramos el siguiente conjunto:

$$A = \left\{ s \in R : s^n < a \right\}.$$

Este conjunto es no vacío ya que $1 \in A$ ($1^n = 1 < a$) y además está acotado superiormente; por ejemplo, una cota superior es el mismo a. Pues si fuese:

$$s > a$$

para algún $s \in A$, entonces sería por Ejercicio 2 del parágrafo 1.4.:

$$s^n > a^n,$$

y, como $a > 1$, $a^n > a$. Luego sería:

$$s^n > a^n > a \Rightarrow s^n > a,$$

lo cual es incompatible con la suposición $s \in A$.

Ya que A es acotado superiormente y no vacío, entonces por completitud existe:

$$b = \sup A \quad (\text{con lo que } b \geq 1 \in A).$$

Afirmamos que $b^n = a$. Supongamos que no es así; entonces será $b^n < a$ ó $b^n > a$. Estudiemos cada caso por separado.

Si fuese $b^n < a$, llamemos $t = a - b^n > 0$. Sea h un número real tal que $0 < h < 1$; entonces:

$$(b+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} h^k =$$

$$= b^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} h^k \leqslant$$

(ya que $h^k \leqslant h$)

$$\leqslant b^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} h =$$

$$= b^n + h . \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} <$$

$$< b^n + h . \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} =$$

$$= b^n + h\,(b+1)^n =$$

$$= a - t + h\,(b+1)^n .$$

Observemos entonces que tomando $h < \dfrac{t}{(b+1)^n}$ (y $0 < h < 1$) resulta:

$$(b+h)^n < a - t + h\,(b+1)^n <$$

$$< a - t + \frac{t}{(b+1)^n} . (b+1)^n =$$

$$= a - t + t = a,$$

o sea;

$$(b+h)^n < a.$$

Luego $b+h \in A$ y $b+h > b$; eso no puede suceder ya que b era el supremo de A. Esto elimina la posibilidad $b^n < a$.

Consideremos entonces la posibilidad restante, $b^n > a$. Sea entonces $t = b^n - a > 0$. Para $0 < h < 1$ será:

$$(b-h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} (-h)^k =$$

$$= b^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} (-h)^k \geqslant$$

(ya que $(-h)^k \geqslant -h$)

$$\geqslant b^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} (-h) =$$

$$= b^n - h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} >$$

$$> b^n - h \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} =$$

$$= b^n - h\,(b+1)^n =$$

$$= a + t - h\,(b+1)^n$$

Tomando entonces $h < \dfrac{t}{(b+1)^n}$ (y $0 < h < 1$), resulta:

$$(b-h)^n > a + t - h(b+1)^n >$$

$$> a + t - \frac{t}{(b+1)^n} (b+1)^n$$

$$= a + t - t = a$$

o sea, $(b-h)^n > a$. Ahora bien, como $b = \sup A$, debe existir $d \in A$ tal que $b - h < d$ (Proposición 1.29) y por lo tanto:

$$(b-h)^n < d^n < a,$$

o sea:

$$(b-h)^n < a,$$

contra lo que hemos visto. Esto descarta la posibilidad $b^n > a$. Como ya habíamos descartado $b^n < a$, necesariamente es:

$$b^n = a.$$

Esto prueba que *existe* b con esa propiedad; que ese b es único, se sigue facilmente del Ejercicio 2 del parágrafo 1.4. (Hacerlo).

• ii) $0 < a < 1$.

En este caso será $\dfrac{1}{a} > 1$. Luego existe b' (por i) tal que:

$$b'^n = \frac{1}{a},$$

de donde:

$$\left(\frac{1}{b'}\right)^n = \frac{1}{b'^n} = \frac{1}{1/a} = a,$$

así que basta tomar $b = 1/b'$. La unicidad se prueba igual que antes.

• iii) $a = 1$.

Caso trivial; resulta $b = 1$ ///.

Ya podemos hablar libremente de raíces cuadradas, cúbicas, etc, de números positivos. En particular, ya conocemos la existencia del número real (positivo) $\sqrt{2}$. Este número nos va a dar nuestro primer ejemplo de un número *irracional*, es decir, *de un número real que no sea racional*. Probemos que, efectivamente, $\sqrt{2}$ es irracional.

Si no fuese así, existirían números naturales p y q tales que:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}\ .$$

Sea t la máxima potencia de 2 que divide a p y m la máxima potencia de 2 que divide a q (su existencia la vimos en el parágrafo 1.6). Entonces será:

$$p = 2^t p'$$
$$q = 2^m q'$$

con p' y q' impares. Supongamos $t > m$; entonces:

$$\frac{p}{q} = \frac{2^{t-m} p'}{q'}$$

o sea, $\frac{p}{q}$ es cociente de un entero par sobre un entero impar. Si $t < m$:

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{2^{m-t} q'}\ .$$

o sea, cociente de un entero impar sobre un entero par. Por último, si $t = m$:

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$$

cociente de dos impares. Esto nos muestra que un número racional siempre puede escribirse como cociente de enteros *que no sean los dos pares.*

Elevando al cuadrado la igualdad $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

o sea:

$$2q^2 = p^2$$

Pero esto nos dice que p^2 es par; según vimos en el parágrafo 1.6, eso implica que p es par. Luego es $p = 2k$ para un cierto entero k y por lo tanto:

$$2q^2 = (2k)^2$$

o sea:

$$2q^2 = 4k^2$$

de donde:

$$q^2 = 2k^2\ .$$

Entonces resulta q^2 par y por lo tanto, según dijimos, q es par. De esta manera, si es $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ con $p, q \in Z$, entonces p y q son pares. Esto contradice el hecho, recién demostrado, de que un racional se puede escribir como cociente de enteros con uno de ellos, por lo menos, impar. Luego no puede ser $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ con p y $q \in Z$, o sea $\sqrt{2}$ es irracional.

Para terminar con esta sección, veamos como algunas propiedades de la potenciación se trasladan a la radicación.

Por ejemplo, si a y b son números reales cualesquiera, sabemos que $(ab)^n = a^n . b^n$ cualquiera sea el natural n. Esto implica, para a y b positivos, que $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$. En efecto, es $(\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n = ab$, luego, como $\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$ es un número positivo que elevado a la n da $a.b$, por la unicidad demostrada en la Proposición 1.31:

$$\sqrt[n]{a}\ .\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$$

(Hemos usado $(\sqrt[n]{a})^n = a$, lo cual es consecuencia inmediata de la definición de raíz n-sima).

Otra propiedad resultante de las de potenciación es la siguiente:

$$(\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p}$$

para $a > 0, q \in N, p \in Z$.

En efecto, es:

$$[(\sqrt[q]{a})^p]^q = (\sqrt[q]{a})^{p.q} = (\sqrt[q]{a})^{q.p} = [(\sqrt[q]{a})^q]^p$$
$$= a^p$$

y por lo tanto:

$$(\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p}$$

(nuevamente usamos la unicidad demostrada en 1.31.).

Una última propiedad y las demas las dejamos como ejercicio (ver ejercicio 6 de este parágrafo). Si a es mayor que 0 y $q, n \in N$, entonces:

$$\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[qn]{a}.$$

En efecto, es:

$$(\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}})^{qn} = [(\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}})^q]^n = [\sqrt[n]{a}]^n = a.$$

Como $\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}}$ elevado a la $q.n$ da a, entonces $\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}}$ es *la* raíz, **q.n-sima** de a, que es lo que habíamos afirmado.

EJERCICIOS

1

Sea $A = \{x \in Q : x^2 < 2\}$. Probar que A está acotado superiormente y que A no es vacío pero que no existe supremo de A en Q (SUGERENCIA: si $b = \sup A \in Q$, entonces no puede ser $b^2 = 2$; para eliminar las posibilidades $b^2 < 2$ y $b^2 > 2$, imitar los razonamientos de la Proposición 1.30).

Concluir que en Q no vale la propiedad de completitud y que dicha propiedad no es consecuencia lógica de las 13 propiedades básicas listadas en el parágrafo 1.2. (ya que Q cumple con esas 13 propiedades).

2

♦ a) Probar que si $\epsilon \geqslant 0$ es tal que $\epsilon < \frac{1}{n}$ para todo $n \in N$, entonces $\epsilon = 0$.

♦ b) Deducir que si $\epsilon \geqslant 0$ es tal que $\epsilon < h$ para todo $h > 0$, entonces $\epsilon = 0$.

3

Sea n un número natural par. Probar que si a es un número real positivo, entonces hay exactamente dos números c tales que $c^n = a$ y son $c = \sqrt[n]{a}$ y $c = -\sqrt[n]{a}$ (Sugerencia: si $n = 2k$, $0 = c^{2k} - (\sqrt[n]{a})^{2k}$ y usar diferencia de cuadrados).

4

Calcular supremo e ínfimo (y probar que lo son) de los conjuntos:

$$A = \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}\ ;$$

$$B = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in N\right\}$$

5

Probar que entre dos números reales a y b con $a < b$ existe un número irracional.

(SUGERENCIA: encontrar $q \in Q$, $q \neq 0$, tal que $\sqrt{2}a < q < \sqrt{2}b$ y tomar $c = q/\sqrt{2}$.

¿Por qué $c \notin Q$?).

6

▲ a) Si $0 < a < b$ y $n \in N$, probar que $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ (Suponer que no, y elevar a la n).

▲ b) Si $a > 1$ y $n, m \in N$ con $n < m$, probar que $\sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$ (Suponer que no, y elevar a la $m.n$).

▲ c) Si $0 < a < 1$ y $n, m \in N$ con $n < m$, entonces $\sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{a}$.

1.10.

POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL

Hemos definido hasta ahora a^n para todo número real a y natural n (en forma inductiva) y hemos definido a^m para todo número real $a \neq 0$ y m entero; esta última definición vimos que era obligada si se quería que siguiese valiendo la propiedad $a^{n+m} = a^n . a^m$ para n y m en Z, propiedad que ya habíamos demostrado para n y m en N.

Vamos a definir ahora $a^{m/n}$ para $m \in Z$, $n \in N$, de manera tal que la otra propiedad de la potenciación ($(a^m)^n = a^{m.n}$) siga siendo válida cuando los exponentes estén en Q. Por razones que enseguida veremos, nos restringiremos al caso en que $a > 0$.

Supongamos que estuviese definido $a^{m/n}$. Entonces, suponiendo verdadera la propiedad mencionada, debería ser:

$$(a^{m/n})^n = a^{\frac{m}{n} n} = a^m,$$

y por lo tanto, si $a^{m/n}$ elevado a la n da a^m, $a^{m/n}$ es la raíz n-sima de a^m:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Damos vuelta todo y empezamos con esa definición:

DEFINICION 1.31.

Sea a un número real mayor que 0. Si $t \in Q$, será $t = m/n$ con $m \in Z$ y $n \in N$. Definimos

$$a^t = \sqrt[n]{a^m}$$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Hay un pequeño detalle que hay que tener en cuenta. Un racional t puede escribirse de muchas maneras como $\frac{m}{n}$ para $m \in Z$ y $n \in N$. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ se puede escribir $\frac{2}{4}$ ó $\frac{3}{6}$ o de infinitas maneras; habría que verificar que la definición dada no depende de la forma de escribir t. Aquí hay que usar las propiedades de la radicación probadas en el anterior parágrafo:

si $t = \frac{m}{n}$ y $t = \frac{p}{q}$ con $m, p \in Z$ y $n, q \in N$,

entonces $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ o sea $mq = np$. Luego:

$$(\sqrt[q]{a^p})^n = \sqrt[q]{(a^p)^n} = \sqrt[q]{a^{pn}} = \sqrt[q]{a^{mq}} = \sqrt[q]{(a^n)^q}$$

$$= a^m$$

y por lo tanto:

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[n]{a^m}$$

o sea, a^t no depende de la expresión elegida ($\frac{m}{n}$ ó $\frac{p}{q}$).

¿Porqué pedimos que sea a mayor que 0? Pues porque en particular debe estar definido $a^{1/2} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt{a}$, que no existe si a es menor que 0; y porque debe estar definido a^{-1} que no existe si $a = 0$.

Con la Definición 1.31 podemos probar que la Proposición 1.11 se extiende al caso en que los exponentes sean números racionales:

PROPOSICION 1.32.

Sea a un número real mayor que 0 y sean $t, s \in Q$. Entonces:

- a) $a^{t+s} = a^t . a^s$;
- b) $(a^t)^s = a^{t.s}$.

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración:

- a) Podemos escribir $t = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$ con $p,m \in Z$, $q,n \in N$.

Entonces:

$$a^{t+s} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} =$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mq} . a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} . \sqrt[nq]{a^{np}} =$$

$$= \sqrt[n]{\sqrt[q]{(a^m)^q}} . \sqrt[q]{\sqrt[n]{(a^p)^n}} =$$

$$= \sqrt[p]{a^m} . \sqrt[q]{a^p} = a^{m/n} . a^{p/q} =$$

$$= a^t . a^s.$$

- b) Análogamente:

$$(a^t)^s = (a^t)^{p/q} = \sqrt[q]{(a^t)^p} = \sqrt[q]{a^{tp}} =$$

$$= \sqrt[q]{a^{\frac{m}{n} . p}} = \sqrt[q]{a^{\frac{mp}{n}}} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} =$$

$$= \sqrt[qn]{a^{mq}} = a^{\frac{mp}{qn}} = a^{\frac{m}{n} . \frac{p}{q}} =$$

$$= a^{t.s} \quad ///$$

EJERCICIOS

1

Sean a y b números reales tales que $0 < a < b$ y sea t un número racional positivo.

Probar que $a^t < b^t$.

2

♦ a) Sea a un número real mayor que 1. Probar que si t y s son racionales y $t < s$, entonces $a^t < a^s$.

♦ b) Sea a un número real tal que $0 < a < 1$. Probar que si t y s son racionales y $t < s$, entonces $a^t > a^s$.

3

Sean a y b números reales mayores que 0. Probar que para todo racional t es:

▲ a) $(ab)^t = a^t b^t$.

▲ b) $a^{-t} = (a^{-1})^t = (a^t)^{-1}$.

▲ c) $(a/b)^t = a^t/b^t$.

4

★ a) Probar que el producto de dos números pares es un número par y que el producto de dos números impares es un número impar.

★ b) Probar que para todo $p \in Z$ y para todo $n \in N$ vale la implicación:

p^n par $\Rightarrow$ p par (inducción sobre n).

★ c) Probar que $\sqrt[n]{2} \notin Q$ para $n \in N$, $n \geq 2$.

1.11.

POTENCIAS DE EXPONENTE REAL

En algunos ejercicios de parágrafos anteriores hemos pedido probar que, para $a > 1$, la potencia a^t es tanto mayor cuanto mayor sea t y exactamente al revés para $0 < a < 1$, culminando con el ejercicio 2) del parágrafo anterior que pide probar estas propiedades para $t \in Q$. Vamos a ver ahora que si suponemos que esa propiedad sigue siendo cierta cuando $t \in \mathbb{R}$, entonces estamos obligados a dar cierta definición de a^x cuando x es un número real cualquiera.

Como paso previo, necesitamos un lema:

LEMA 1.33.

Sea a un número real mayor que 1 y sea x un número real cualquiera. Entonces cualquiera sea $\epsilon > 0$ existen números racionales r' y r tales que:

- i) $r < x < r'$.
- ii) $a^{r'} - a^{r} < \epsilon$.

****

Demostración: Recordamos la desigualdad de Bernoulli (Proposición 1.12) que dice que si $h > -1$ entonces para todo $n \in N$ es:

$$(1+h)^n \geqslant 1+nh$$

desigualdad de la cual obtenemos:

$$h \leqslant \frac{(1+h)^n - 1}{n}$$

válida para todo $h > -1$.

Sea n un número natural, arbitrario por ahora, y sean r, r' números racionales tales que:

$$x - \frac{1}{2n} < r < x < r' < x + \frac{1}{2n}$$

(sabemos que existen por la Proposición 1.29).

Entonces:

$$r' - r < x + \frac{1}{2n} - r < x + \frac{1}{2n} - (x - \frac{1}{2n}) =$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} .$$

Por otra parte:

$$a^{r'} - a^{r} = a^{r'-r+r} - a^{r} = a^{r'-r} \cdot a^{r} - a^{r} =$$

$$= (a^{r'-r} - 1)a^{r} .$$

Consideremos $h = a^{r'-r} - 1$; como $a^{r'-r} > 0$ (pues $a^{r'-r} \geqslant a^0 = 1$), entonces $h > -1$ y podemos aplicar Bernoulli:

$$a^{r'-r} - 1 \leqslant \frac{(1 + a^{r'-r} - 1)^n - 1}{n} =$$

$$= \frac{a^{(r'-r)n} - 1}{n} <$$

$$< \frac{a^{\frac{1}{n} \cdot n} - 1}{n} =$$

$$= \frac{a-1}{n} .$$

El n hasta ahora era arbitrario (y los racionales r y r' elegidos dependían de su elección); elegimos ahora, para un cierto $\epsilon > 0$, un n que satisfaga:

$$n > \frac{a-1}{\epsilon} \cdot a^M \quad (M\text{: número natural tal que } x < M)$$

(existe por Arquímedes). Para ese n tenemos r y r' que satisfacen:

$$a^{r'} - a^{r} = (a^{r'-r} - 1)\, a^{r} < \frac{a-1}{n} \cdot a^{r} <$$

(ya que $r \leqslant x < M$)

$$< \frac{a-1}{n} \cdot a^M \; \frac{a-1}{a-1/(\epsilon a^M)} \cdot a^M =$$

$$= \epsilon$$

lo cual prueba el lema ///.

Supongamos entonces tener definido a^x para $a > 1$ y $x \in R$ de modo que valga la siguiente propiedad: si $x < y$ entonces $a^x < a^y$. Consideremos el conjunto $\{a^r : r \in Q, r \leqslant x\}$, formado por todas las potencias a^r con $r \in Q$, $r \leqslant x$. Por la propiedad que estamos suponiendo, $a^r \leqslant a^x$ para todo $r \leqslant x$, luego a^x es cota superior del conjunto dado. Si, dado $\epsilon > 0$, elegimos r y r' como en el Lema 1.33, entonces será

$$a^x - a^r \leqslant a^{r'} - a^r < \epsilon .$$

Luego a^x cumple con S_1' y S_2' de la Proposición 1.22 y en consecuencia a^x es el *supremo* del conjunto dado.

Damos vuelta todo y comenzamos con esa definición:

DEFINICION 1.34.

Sea a un número real *mayor que* 1 y sea x un número real cualquiera.

Definimos:

$$a^x = \sup \left\{ a^r ; r \in Q, r \leqslant x \right\}$$

****

Ahora bien, para que podamos hablar del supremo de un conjunto, éste tiene que estar acotado superiormente y ser no vacío.

Que está acotado superiormente se sigue del hecho de que existe un natural n tal que $n > x$; pues entonces, si $r \leqslant x$ será $r < n$ y por lo tanto (r y n son racionales) $a^r < a^n$, con lo que a^n es cota superior. Y que es no vacío se sigue del hecho de que existen números racionales r tales que $r \leqslant x$ (con lo cual a^r pertenece al conjunto dado). (que esos racionales existen se sigue de que hay un natural m tal que $-x < m$, luego $-m < x$ y $-m \in Z \subset Q$).

Una cuestión más referente a la Definición 1.34: si x es en particular un número racional, digamos $x = t \in Q$, entonces ya tenemos una definición de a^t (la dimos en el parágrafo anterior) y, por lo tanto, habría que probar que ambas definiciones coinciden. O sea habría que probar que, *para t racional:*

$$a^t = \sup [a^r : r \in Q, r \leqslant t]$$

lo cual es muy fácil y se deja como ejercicio (en realidad, a^t es el *máximo* de ese conjunto siempre que t sea racional).

Probamos ahora que la propiedad cuya suposición nos llevó a la Definición 1.34 es valedera:

PROPOSICION 1.35

Sea a un número real mayor que 1 y sean x, y números reales tales que $x < y$. Entonces $a^x < a^y$

****

Demostración: Sean t y h números racionales tales que $x < t < h < y$ (existen por 1.29).

Si $r \in Q$, $r \leqslant x$, entonces será $r < t < h$ y por lo tanto:

$$a^r < a^t < a^h \leqslant a^y .$$

Luego a^t es cota superior de $\{a^r : r \in Q, r \leqslant x\}$ y por lo tanto:

$$a^x \leqslant a^t < a^h \leqslant a^y ,$$

o sea:

$$a^x < a^y \quad ///$$

Podemos probar ahora que también podíamos haber usado los racionales $r \geqslant x$ para definir a^x:

PROPOSICION 1.36.

Si a es un número real mayor que 1 y $x \in R$, entonces

$$a^x = \inf [a^r : r \in Q, r \geqslant x]$$

****

Demostración: Si $r \geqslant x$, entonces $a^r \geqslant a^x$ por la Proposición anterior. Luego a^x es cota inferior del conjunto dado.

Por otra parte, si ϵ es un número cualquiera mayor que cero, por el Lema 1.33 existen $r, r' \in Q$ tales que

$$\begin{cases} r < x < r' \\ a^{r'} - a^r < \epsilon \end{cases}$$

Entonces $a^{r'} - a^x < a^{r'} - a^r < a$, o sea $a^{r'} < a^x + \epsilon$.

Luego a^x cumple I_1' e I_2' del ejercicio 4 del Parágrafo 1.8 y así a^x es el ínfimo del conjunto dado.///

Definimos ahora a^x para $0 < a < 1$; la definición es inevitable si se quiere conservar la propiedad que $x < y$ implique $a^x > a^y$ cuando x e y son números reales:

DEFINICION 1.37.

Sea a un número real tal que $0 < a < 1$. Para $x \in R$ definimos:

$$a^x = \inf\{a^r : r \in Q, r \leq x\}$$

****

Que $\{a^r : r \in Q, r \leq x\}$ es acotado inferiormente y no vacío se prueba en forma similar a lo que hicimos luego de dar la Definición 1.34, así como el hecho de que, para x racional, coincide con la definición dada en el parágrafo anterior.

Para el caso $0 < a < 1$ tenemos algo análogo al Lema 1.33:

LEMA 1.38.

Sea a un número real tal que $0 < a < 1$ y sea x un número real cualquiera.

Entonces cualquiera sea $\epsilon > 0$ existen números racionales r' y r tales que:

- i) $r < x < r'$.
- ii) $a^r - a^{r'} < \epsilon$.

****

Demostración: Como $\frac{1}{a} > 1$, por 1.33 existen racionales t y t' tales que:

$$\begin{cases} t' < -x < t. \\ \left(\frac{1}{a}\right)^t - \left(\frac{1}{a}\right)^{t'} < \epsilon . \end{cases}$$

Sean $r = -t$, $r' = -t'$; entonces $r < x < r'$ y además

$$a^r - a^{r'} = a^{-t} - a^{-t'} = \left(\frac{1}{a}\right)^t - \left(\frac{1}{a}\right)^{t'} < \epsilon \ ///.$$

Veamos que vale la propiedad cuya suposición, según afirmamos, lleva a la Definición 1.37:

PROPOSICION 1.39.

Sea a un número real tal que $0 < a < 1$ y sean x, y números reales tales que $x < y$. Entonces $a^x > a^y$.

****

Demostración: Sean t y h números racionales tales que $x < t < h < y$ (que existen por 1.29)

Si $r \in Q$, $r \leq x$, entonces será $r < t < h$ y por lo tanto:

$$a^r > a^t > a^h \geq a^y$$

Luego a^t es cota inferior de $\{a^r : r \in Q, r \leq x\}$ y en consecuencia:

$$a^x \geq a^t > a^h \geq a^y$$

o sea:

$$a^x > a^y \ ///.$$

La Proposición 1.36 tiene también su análoga en este caso:

PROPOSICION 1.40.

Si a es un número real tal que $0 < a < 1$ y $x \in R$, entonces:

$$a^x = \sup\{a^r : r \in Q, r \geq x\}.$$

****

Demostración: Si $r \geq x$, entonces $a^r \leq a^x$ por la Proposición anterior. Luego a^x es cota superior del conjunto dado.

Por otra parte, si ϵ es un número cualquiera mayor que cero, por el Lema 1.38 existen $r, r' \in Q$ tales que:

$$\begin{cases} r < x < r' \\ a^r - a^{r'} < \epsilon \end{cases}$$

Entonces $a^x - a^{r'} < a^r - a^{r'} < \epsilon$, o sea, $a^x - \epsilon < a^{r'}$. Como $a^{r'}$ pertenece al conjunto dado, entonces a^x cumple S_1' y S_2' de la Proposición 1.22, y resulta así ser el supremo de dicho conjunto.///

Desde luego, definimos $1^x = 1$ para todo $x \in R$, con lo que ya sabemos qué es a^x para todo $x \in R$ y para todo número real $a > 0$. De 1.34 y 1.40 concluímos que *siempre es* $a^x > 0$, ya que así ocurre para a^r para cualquier $r \in Q$ (pues la definición de a^r para $r = \frac{m}{n} \in Q$ era $\sqrt[n]{a^m}$ y la raíz n-sima, por definición, es siempre positiva). En particular, $a^x \neq 0$ y entonces existe $(a^x)^{-1}$. La siguiente Proposición nos dice quién es $(a^x)^{-1}$:

PROPOSICION 1.41.

Sea a un número real mayor que 0 y sea $x \in R$. Entonces:

$$(a^x)^{-1} = a^{-x} = (a^{-1})^x.$$

****

Demostración: Supongamos primero $a > 1$. Entonces.

★ i) Si $r \geq x$ entonces $a^r \geq a^x$. Luego $\frac{1}{a^x} \geq \frac{1}{a^r}$, o sea $(a^x)^{-1} \geq (a^r)^{-1} = (a^{-1})^r$ (ejercicio 3.b de 1.10) con lo cual $(a^x)^{-1}$ es cota superior de $\{(a^{-1})^r : r \in Q, r \geq x\}$.

★ ii) Supongamos que c es otra cota superior de ese conjunto. Entonces:

$$c \geq (a^{-1})^r \text{ o sea } c \geq a^{-r}$$

para todo $r \in Q$, $r \geq x$

Luego:

$$c^{-1} \leq (a^{-r})^{-1} = a^r$$

para todo $r \in Q$, $r \geq x$

con lo cual:

$$c^{-1} \leq a^x$$

por Proposición 1.36. Luego:

$$\frac{1}{a^x} \leq \frac{1}{c^{-1}} = c,$$

o sea:

$$(a^x)^{-1} \leq c.$$

Luego $(a^x)^{-1}$ es la menor cota superior de ese conjunto, o sea:

$$(a^x)^{-1} = \sup\{(a^{-1})^r : r \in Q, r \geq x\} = (a^{-1})^x.$$

Esto nos da una igualdad; para la otra, observamos que:

$$a^{-x} = \sup\{a^r : r \in Q, r \leq -x\},$$

mientras que:

$$(a^{-1})^x = \sup\{(a^{-1})^r : r \in Q, r \geq x\} = \sup\{a^{-r} : r \in Q, r \geq x\} = \sup\{a^{-r} : -r \in Q, -r \leq -x\} =$$

(con $t = -r$)

$$= \sup\{a^t : t \in Q, t \leq -x\} =$$

(por 1.37)

$$= a^{-x}.$$

Entonces esos tres números ($(a^x)^{-1}$, a^{-x} y $(a^{-1})^x$) son iguales si $a > 1$.

Supongamos ahora $0 < a < 1$. Como $a^{-1} > 1$, entonces llamando $b = a^{-1}$ resulta, por lo que acabamos de probar:

$$b^x = b^{-(-x)} = (b^{-1})^{-x},$$

o sea:

$$(a^{-1})^x = a^{-x}.$$

y por otra parte es:

$$(b^x)^{-1} = (b^{-1})^x,$$

o sea:

$$b^x = [\ (b^{-1})^x\ ]^{-1},$$

es decir:

$$(a^{-1})^x = (a^x)^{-1},$$

lo cual termina de probar la Proposición ///

La Proposición 1.41 se puede escribir también como:

$$\frac{1}{a^x} = a^{-x} = (\frac{1}{a})^x.$$

Estamos ya en condiciones de probar las propiedades elementales de la potencia de exponente real.

PROPOSICION 1.42

Sea a un número real mayor que 0 y sean x, y $\in$ R. Entonces:

$$a^{x+y} = a^x . a^y.$$

Demostración: Supongamos primero $a > 1$. Por el lema 1.33, sabemos que dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar números racionales r y r' tales que:

$$\begin{cases} r < x+y < r' \\ a^{r'} - a^r < \epsilon . \end{cases}$$

Afirmamos que existen números racionales, r_1, r_2 r'_1 y r'_2 tales que:

$$r_1 < x < r'_1$$
$$r_2 < y < r'_2$$
$$r < r_1 + r_2 < x+y < r'_1 + r'_2 < r' . \quad (1)$$

En efecto, como $r - x < y$, existe $r_2 \in Q$ tal que:

$$r - x < r_2 < y,$$

o sea:

$$r < x + r_2 < x+y.$$

Pero al ser $r < x+r_2$ es $r - r_2 < x$ y existe, entonces, $r_1 \in Q$ tal que:

$$r - r_2 < r_1 < x,$$

con lo cual:

$$r < r_1 + r_2 < x + r_2 < x+y,$$

o sea:

$$r < r_1 + r_2 < x+y.$$

Los racionales r'_1 y r'_2 se encuentran de manera análoga. De (1) resulta:

$$a^r < a^{r_1+r_2} < x+y < a^{r'_1+r'_2} < a^{r'}.$$

Pero $a^{r_1+r_2} = a^{r_1} a^{r_2}$, por Proposición 1.32 y análogamente $a^{r'_1+r'_2} = a^{r'_1} . a^{r'_2}$.

Entonces:

$$a^x a^y - a^{x+y} < a^{r'_1} a^{r'_2} - a^{x+y} < a^{r'_1+r'_2} - a^r <$$
$$< a^{r'} - a^r < \epsilon,$$

y además:

$$a^{x+y} - a^x a^y < a^{r'} - a^{r_1} a^{r_2} = a^{r'} - a^{r_1+r_2} <$$
$$< a^{r'} - a^r < \epsilon.$$

Esto vale para todo $\epsilon > 0$; si fuera $a^x . a^y - a^{x+y} > 0$, no podría ser $a^x a^y - a^{x+y} < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$; si fuera $a^x . a^y - a^{x+y} < 0$, o sea $a^{x+y} - a^x . a^y > 0$, no podría ser $a^{x+y} - a^x a^y < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Luego $a^x . a^y - a^{x+y} = 0$, o sea:

$$a^{x+y} = a^x . a^y$$

Esto prueba la Proposición si $a > 1$. Para $0 < a < 1$ es:

$$a^{x+y} = (a^{-1})^{-(x+y)} = (a^{-1})^{-x+(-y)} =$$

(pues $a^{-1} > 1$)

$$= (a^{-1})^{-x} . (a^{-1})^{-y} = \qquad \text{(por 1.41)}$$
$$= a^x . a^y .$$

con lo que queda la Proposición, pues para $a = 1$ es trivial ///

PROPOSICION 1.43.

Sea a un número real mayor que 0 y sean x,y $\in$ R. Entonces:

$$(a^x)^y = a^{x.y}$$

Demostración: Observemos primero que esta afirmación es cierta para $y = n \in N$:

$$(a^x)^n = a^{x.n};$$

lo cual se prueba por inducción:

- i) $(a^x)^1 = a^x = a^{x.1}$
- ii) si $(a^x)^n = a^{x.n}$, entonces:

$$(a^x)^{n+1} = (a^x)^n . a^x = a^{xn} . a^x = \quad \text{(por 1.42)}$$
$$= a^{xn+x} = a^{x(n+1)}$$

Entonces también es cierta para $y = m \in Z$. En efecto, si $m = 0$ es trivial, y si $m = -n$:

$$(a^x)^{-n} = [(a^x)^{-1}]^n = \qquad \text{(por 1.41)}$$
$$= [a^{-x}]^n = \qquad \text{(por ser } n \in N \text{ y lo ya probado)}$$
$$= a^{(-x).n} = a^{-xn} =$$
$$= a^{x(-n)}$$

Ahora resulta válida para $y = \frac{m}{n} \in Q (m \in Z, n \in N)$.

En efecto.

$$(a^x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^x)^m} = \sqrt[n]{a^{xm}}$$

y como $(a^{x\frac{m}{n}})^n = a^{x.\frac{m}{n}.n} = a^{xm}$, por unicidad de la raíz n-sima es:

$$\sqrt[n]{a^{xm}} = a^{x\frac{m}{n}}$$

con lo que:

$$(a^x)^{\frac{m}{n}} = a^{x.\frac{m}{n}}$$

Entonces la Proposición es verdadera mientras y sea un número racional. Estudiemos el caso general en el que y es un número real cualquiera.

Supongamos primero $a > 1, x > 0$. Por Lema 1.33, dado $\epsilon > 0$ existen $r, r' \in Q$ tales que:

$$\begin{cases} r < y < r' \\ (a^x)^{r'} - (a^x)^r < \epsilon \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$a^{xy} - (a^x)^y < a^{xr'} - (a^x)^y < a^{xr'} - (a^x)^r =$$
$$= a^{xr'} - a^{xr} < \epsilon;$$

y también:

$$(a^x)^y - a^{xy} < (a^x)^{r'} - a^{xy} < (a^x)^{r'} - a^{xr} =$$
$$= a^{xr'} - a^{xr} < \epsilon,$$

y entonces resulta:

$$\begin{cases} a^{xy} - (a^x)^y < \epsilon \\ (a^x)^y - a^{xy} < \epsilon \end{cases}$$

cualquiera sea $\epsilon > 0$. Eso determina, como vimos en 1.42, que:

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

si $a > 1$ y $x > 0$.

Si $x < 0$, entonces

$$(a^x)^y = [(a^x)^{-1}]^{-y} = \qquad \text{(por 1.41)}$$
$$= [a^{-x}]^{-y} = \qquad \text{(por ser } a > 1$$
$$= a^{(-x).(-y)} = \qquad y - x > 0)$$
$$= a^{xy}$$

Supongamos por último $0 < a < 1$. Entonces $a^{-1} > 1$ y en consecuencia:

$$(a^x)^y = \qquad \text{(por ser } a^{-1} > 1)$$
$$= [(a^{-1})^{(-x)}]^y = (a^{-1})^{-xy} = a^{xy} \quad \text{(por 1.41)}$$

lo que termina de probar la Proposición.///

1.12. MODULO O VALOR ABSOLUTO DE UN NUMERO REAL

Vamos a definir ahora un concepto que resultará de mucha utilidad en próximos capítulos. Este concepto es el de *módulo* de un número real a y significa, hablando con poca precisión, el mismo número a pero sacándole el signo "menos" si lo tuviese.

Así, por ejemplo, el módulo de 2 (que se escribe $|2|$) es igual a 2, el módulo de -3 es $+3$ (o sea, $|-3| = 3$) y $|0| = 0$. Para dar la definición general, observamos que la igualdad $|-3| = 3$ se puede escribir: $|-3| = -(-3)$; con esto en vista, definimos:

DEFINICION 1.44.

Dado un número real a, llamaremos *módulo* o *valor absoluto* de a al mismo a si a es positivo o cero, y $-a$ si a es negativo, es decir:

$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

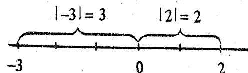
De esta manera, *el módulo de un número real es siempre mayor o igual que cero.*

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

En efecto, si $a \geq 0$, entonces $|a| = a \geq 0$; si $a < 0$, entonces, sumando $-a$ a ambos miembros, resulta $0 < -a$, o sea $-a > 0$(1). Luego $|a| = -a \geq 0$.

Más aún, ***el 0 es el único número real cuyo módulo es 0***. En efecto, si $a > 0$ estamos en el primer caso y por lo tanto $|a| = a$. Luego $|a| > 0$, en particular $|a| \neq 0$; y si $a < 0$, ya vimos que $|a| = -a$ es mayor que cero, en particular también distinto de cero.

Usando la representación de $\mathbb{R}$ en una recta, el módulo de a tiene una sencilla interpretación: es la distancia que hay entre a y el 0:



(una distancia, desde luego, nunca es negativa).

En términos de raíces cuadradas, el módulo tiene una sencilla caracterización:

PROPOSICION 1.45.

Para todo número real a es:

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

---

(1) A algunos alumnos les llama la atención que $-a$ pueda ser positivo teniendo un signo *menos* delante. Lo que ocurre es que siendo a negativo como en este caso, a ya tiene, por así decirlo, un *menos* que, con el *menos* que se pone delante de a, da un número positivo.

Demostración: En primer término, observemos que a^2 es siempre mayor o igual que cero y, por lo tanto, tiene una (única) raíz cuadrada no negativa (Proposición 1.30 parágrafo 1.9.), o sea hay un único no negativo que elevado al cuadrado da a^2

Si $a \geq 0$, entonces a es no negativo y elevado al cuadrado da, obviamente, a^2; luego, si $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = a$.

Si $a < 0$, entonces será $-a > 0$ o sea $-a$ positivo. En particular, $-a$ es no negativo y, además $(-a)^2 = (-a)\cdot(-a) = a.a = a^2$; luego, si $a < 0$, $\sqrt{a^2} = -a$.

En resumen resulta

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

o sea $\sqrt{a^2} = |a|$ ///

Usando la Proposición 1.45, probamos ahora algunas propiedades elementales del módulo.

PROPOSICION 1.46.

Sean a y b números reales cualesquiera. Entonces:

- i) $|ab| = |a|\,|b|$.
- ii) si $b \neq 0$, $|a/b| = |a|/|b|$.

Demostración: ★ i) Pues:

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2}\,\sqrt{b^2} =$$
$$= |a|\,|b|.$$

★ ii) Analogamente:

$$|a/b| = \sqrt{(a/b)^2} = \sqrt{a^2/b^2} = \sqrt{a^2}/\sqrt{b^2}$$
$$= |a|/|b| \quad ///$$

Queremos ver ahora como se comporta el módulo con la suma; hacemos previamente una observación trivial: para todo número real a es $a \leq |a|$ (si a es ≥ 0, vale la igualdad; si $a < 0$, vale la desigualdad pues el primer miembro es negativo y el segundo positivo).

PROPOSICION 1.47.

Sean a y b números reales cualesquiera. Entonces:

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Demostración: Supongamos que no es así, es decir:

$$|a+b| > |a| + |b|.$$

Como ambos miembros son positivos, elevando al cuadrado se mantiene la desigualdad:

$$|a+b|^2 > (|a| + |b|)^2,$$

o sea:

$$|a+b|^2 > |a|^2 + 2\,|a|\,|b| + |b|^2$$

y por 1.46:

$$|a+b|^2 > |a|^2 + 2\,|a.b| + |b|^2$$

Usando 1.45:

$$(\sqrt{(a+b)^2})^2 > (\sqrt{a^2})^2 + 2\,|a.b| + (\sqrt{b^2})^2$$

de donde:

$$(a+b)^2 > a^2 + 2\,|ab| + b^2$$

o sea:

$$a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + 2\,|ab| + b^2$$

Simplificando a^2, b^2 y luego simplificando el 2

$$ab > |ab|$$

lo cual contradice la observación previa a esta Proposición. ///

La siguiente Proposición nos resultará muy útil en capítulos siguientes:

PROPOSICION 1.48.

Si b es un número real *positivo*, entonces la desigualdad:

$$|a| \leqslant b$$

es equivalente a la doble desigualdad:

$$-b \leqslant a \leqslant b.$$

Demostración: Si pensamos en la representación de $\mathbf{R}$ en la recta, la verdad de esta Proposición se hace evidente: en efecto, $|a|$ mide la distancia de a al 0.



Luego que $|a|$ sea menor o igual que b significa que la distancia de a a 0 no debe ser mayor que b. Entonces a no se puede pasar de b a la derecha ni de $-b$ a la izquierda, y esto es lo mismo que decir $-b \leqslant a \leqslant b$.

De todas maneras, habíamos prometido que la representación de $\mathbf{R}$ en la recta no iba a ser utilizada en ninguna demostración, así que procedemos a hacer esta en forma rigurosa.

Supongamos $|a| \leqslant b$ o sea, por 1.45

$$\sqrt{a^2} \leqslant b$$

Elevando al cuadrado:

$$a^2 \leqslant b^2,$$

o sea:

$$a^2 - b^2 \leqslant 0,$$

de donde:

$$(a-b)(a+b) \leqslant 0.$$

Ahora bien, para que un producto sea $\leqslant 0$, un número debe ser $\leqslant 0$ y el otro $\geqslant 0$ (¿qué pasa en los demás casos?). Luego hay dos posibilidades:

$$a-b \leqslant 0 \text{ y } a+b \geqslant 0,$$

o sino:

$$a-b \geqslant 0 \text{ y } a+b \leqslant 0.$$

Puesto de otra manera, tenemos las dos posibilidades:

$$a \leqslant b \text{ y } a \geqslant -b,$$

o sino:

$$a \geqslant b \text{ y } a \leqslant -b$$

Pero la segunda posibilidad no es tal: como $b > 0$, entonces así $a \geqslant b$ resulta $a \geqslant 0$ y por lo tanto a no puede ser $\leqslant$ que $-b$ (ya que $-b$ es menor que 0).

Luego, en definitiva, $|a| \leqslant b$ implica:

$$a \leqslant b \text{ y } a \geqslant -b,$$

que es otra forma de escribir que $-b \leqslant a \leqslant b$.

Recíprocamente, si $-b \leqslant a \leqslant b$, entonces es:

$$-b \leqslant a \text{ y } a \leqslant b,$$

o sea:

$$0 \leqslant a+b \text{ y } a-b \leqslant 0.$$

Por lo tanto, el producto de $a+b$ y $a-b$ es $\leqslant 0$:

$$(a+b)(a-b) \leqslant 0,$$

o sea:

$$a^2 - b^2 \leqslant 0,$$

de donde:

$$a^2 \leqslant b^2;$$

y entonces:

$$\sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{b^2},$$

o sea:

$$|a| \leqslant |b|.$$

Como $b > 0$ por hipótesis, entonces $|b| = b$. En definitiva:

$$|a| \leqslant b$$

y la Proposición queda así probada.

///

Nos vamos a encontrar, en capítulos siguientes, con situaciones de este tipo: tener que encontrar los números reales x que verifican, por ejemplo, la desigualdad $|3x-1| \leqslant 5$. En vista de la Proposición precedente, es fácil resolver este problema: la desigualdad $|3x-1| \leqslant 5$ es equivalente a la doble desigualdad:

$$-5 \leqslant 3x - 1 \leqslant 5.$$

Sumando 1:

$$-4 \leqslant 3x \leqslant 6.$$

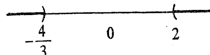
Dividiendo por 3:

$$-\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant \frac{6}{3} \Rightarrow -\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 2.$$



¿Y si se nos pide hallar los x que verifiquen que el módulo de una expresión en x sea *mayor* que un cierto número? Pues hallamos los que cumplen lo opuesto, que ese módulo sea ***menor o igual*** que el número y lo que obtengamos como solución es justamente los números que *no* son solución del problema original. Desechamos entonces esos números y nos quedamos con los restantes.

Por ejemplo, si nos piden hallar los números reales x que verifican $|3x-1| > 5$, hallamos los que cumplen $|3x-1| \leqslant 5$ (eso lo acabamos de hacer; son los x tales que $-\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 2$) y nos quedamos con los restantes, o sea, los x tales que $x > 2$ y *además* los x tales que $x < -\frac{4}{3}$;



EJERCICIOS

1

Probar que $|a-b| = |b-a|$.

2

Probar que $|a|^2 = |a^2| = a^2$.

3

Probar que si $b \neq 0$, $|b^{-1}| = |b|^{-1}$.

4

★ a) Probar que $|a-b| \geqslant |a| - |b|$.
Sugerencia: escribir $a = (a-b) + b$ y aplicar 1.47.

★ b) Probar que $-|a-b| \leqslant |a| - |b|$.
(Cambiar a por b en la anterior desigualdad)

★ c) Concluir por 1.48 que $|a-b| \leqslant ||a| - |b||$.

5

◆ a) *Probar, usando sólo la definición 1.44, que si* $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, *entonces* $|a+b| = |a| + |b|$.

◆ b) Probar, usando sólo la definición 1.44, que si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $|a+b| = |a| + |b|$.

◆ c) *Probar, usando sólo la definición 1.44, que si* $a < 0$ *y* $b > 0$, *entonces* $|a+b| < |a| + |b|$.

◆ d) *Probar, usando sólo la definición 1.44, que* $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

(Usar a) b) y c) y completar con los casos que faltan).

6

Probar, usando sólo la definición 1.44, que $|a.b| = |a| \cdot |b|$ (Considerar todos los casos posibles).

7

Probar que si $a \in \mathbf{R}$ es tal que $|a| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, entonces $a = 0$.

8

Probar que la desigualdad $|a| < b$ *es equivalente a la doble desigualdad* $-b < a < b$ *(b es un número positivo; imitar 1.48).*

9

Hallar y representar en la recta los números reales x que verifican:

- a) $|x-3| < 1$;
- b) $|2x+1| < 2$;
- c) $|4x-3| \leqslant 5$;
- d) $|x-2| > 1$;
- e) $|3x+6| > 2$;
- f) $|4x-12| > 4$;
- g) $|2-3x| \leqslant 1$;
- h) $|1-6x| > 4$;
- i) $|12-4x| \geqslant 3$;
- j) $|x-1| + |2x-3| < 6$.

(Considerar los casos:
$x < 1, 1 \leqslant x < \frac{3}{2}$ y $x \geqslant \frac{3}{2}$).

- k) $|6x+2| - |2x+5| < 7$.

(Idem:
$x < -\frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \leqslant x < -\frac{1}{3}, x \geqslant -\frac{1}{3}$).

- l) $|2x-4| + |3x+2| < 5$;
- m) $|2-6x| + |3x-1| > 4$;
- n) $\dfrac{|2x-8|}{1-|x-2|} < 1$;
- o) $\dfrac{|3x+1| + |x|}{|2x-4| - 2} \geqslant 2$;
- p) $\dfrac{|2-2x| - |x-3|}{|x-1| - |x+1|} > 4$;
- q) $\dfrac{|3-2x| + |6x+4|}{|x| - |x-3|} \leqslant 4$.

10

Probar que para todo número real $a \neq 0$ *es* $|a+a^{-1}| \geqslant 2$ *¿Cuáles son los* a *que verifican la igualdad?*

11

Probar que cualesquiera sean los números reales $a_1, \ldots, a_n$, es:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

(Inducción sobre n y 1.47).

12

Probar que cualesquiera sean los números reales $a_1, \ldots, a_n$, es:

$$\left|\prod_{k=1}^{n} a_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |a_k|.$$

(Inducción sobre n y 1.46, i).

CAPITULO II

Funciones y su Representación Gráfica

2.1. DEFINICION DE FUNCION

En el capítulo anterior nos hemos enfrentado dos veces con correspondencias o asignaciones de elementos de un conjunto a elementos de otro conjunto.

En efecto, al dar la forma popular del principio de inducción (corolario 1.4 de parágrafo 1.3) supusimos tener para cada número natural n una afirmación $P(n)$ acerca de él; dicho de otro modo, supusimos tener una correspondencia que a cada $n \in N$ le asignaba una afirmación o proposición acerca de él.

Asimismo, en el parágrafo 1.4, definimos una sucesión como una correspondencia que a cada número natural n le asignaba un número real que indicábamos a_n.

En ambos casos tenemos dos conjuntos y una correspondencia que a cada elemento del primer conjunto le asigna un elemento del segundo.

Este tipo de situaciones es tan común en Matemáticas que es conveniente darle un nombre:

DEFINICION 2.1.

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Una *función* de A en B es una correspondencia que a *cada* elemento de A le asigna un *único* elemento de B.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Es costumbre indicar una función de A en B como $f: A \to B$ y si $a \in A$, indicar por $f(a)$ al elemento de B que le corresponda por la función.

EJEMPLOS

1

Sean $\mathbb{A} = \{a, b, c, d\}$, $\mathbb{B} = \{0, 1, 2, 3\}$ y $f: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ la correspondencia definida por:

$$f(a) = 2 \qquad f(c) = 1$$
$$f(b) = 0 \qquad f(d) = 3$$

Entonces esta correspondencia *es* una función de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$ pues efectivamente a cada elemento de $\mathbb{A}$ le corresponde un solo elemento de $\mathbb{B}$ (al elemento **a** le corresponde solamente el **2**, a **b** solamente el **0**, a **c** solamente el **1** y a **d** solamente el **3**).

2

Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ como en el ejemplo anterior y sea $f: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ definida por:

$$f(a) = 1 \qquad f(c) = 0$$
$$f(b) = 0 \qquad f(d) = 2$$

Esta correspondencia también es una función de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$, no importa que a **b** y a **c** les corresponda el mismo elemento (pues a cada uno de ellos le corresponde *un* elemento).

3

Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ como en el ejemplo anterior y sea $f: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ definida por:

$$f(a) = 1 \qquad f(a) = 2 \qquad f(d) = 2$$
$$f(b) = 0 \qquad f(c) = 3$$

Esta correspondencia *no* es una función de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$ pues no se le asigna ningún elemento a **d**, y la definición 2.1 pide que el elemento que le corresponda a uno dado sea *único*.

4

Siempre con los mismos $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, sea $f: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ definida por:

$$f(a) = 1 \qquad f(c) = 2$$
$$f(b) = 0$$

Esta correspondencia *no* es una función de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$ pues no se le asigna ningún elemento a **d**, y la definición 2.1 pide que a *cada* elemento de $\mathbb{A}$ se le asigne uno de $\mathbb{B}$.

5

Empezamos ahora a considerar el tipo de funciones en los que vamos a estar interesados. Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales y sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(a) = a^2$$

Esta correspondencia es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ pues *todo* número real tiene su cuadrado y además ese cuadrado es *único* (no importa que distintos elementos, como **2** y **−2**, puedan tener el mismo cuadrado).

6

Nuevamente sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ iguales a $\mathbb{R}$ y consideremos la correspondencia que a cada número real **a** le asigna su raíz cuadrada positiva (si existe), o sea $f(a) = \sqrt{a}$.

Esta correspondencia *no* es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ porque no asigna ningún elemento a los números negativos (pues éstos no tienen raíz cuadrada dentro de los números reales).

7

Observemos que si tomamos $\mathbb{A} = \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$ y $\mathbb{B} = \mathbb{R}$, entonces la correspondencia que al elemento $a \in \mathbb{R}_{>0}$ le asigna $f(a) = \sqrt{a}$ *sí* es una función porque todos los elementos de $\mathbb{R}_{>0}$ tienen raíz cuadrada positiva (y es única).

Este ejemplo, junto con el anterior, muestra que una misma correspondencia puede o no ser una función según como se elijan los conjuntos $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$.

Digamos algo más sobre la terminología habitual. Cuando se estudian funciones $f: \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ siendo $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ (eventualmente $\mathbb{A} = \mathbb{R}$), es costumbre indicar por una "x" los elementos de $\mathbb{A}$. Así las funciones de los ejem-

plos 5. y 7. se suelen escribir $f(x) = x^2$ y $f(x) = \sqrt{x}$.

Otra costumbre universal para este tipo de funciones es indicar con una "y" al elemento que le corresponde a **x** (o sea, a **f (x)**).

De esta manera, en los ejemplos 5. y 7. se suele hablar de "la función $y = x^2$" y de "la función $y = \sqrt{x}$"

Cuando se adopta esta forma de escribir las funciones, es una costumbre, no canonizada por el formalismo pero costumbre al fin, referirse a **x** como la ***variable independiente*** y a **y** como la ***variable dependiente***, reflejando esas expresiones el hecho de que, para una función dada, a **x** le podemos dar valores más o menos arbitrarios mientras que el valor correspondiente de **y** depende del valor que le hemos dado a **x**.

Por ejemplo, para la función $y = x^2$, a **x** le podemos dar el valor que se nos ocurra y el valor de **y** dependerá del valor que le demos a **x** (si a **x** le damos el valor **2**, **y** vale **4**, si le damos el valor **3**, **y** vale **9**, etc.)

Esta idea un tanto dinámica de las funciones no tiene un correlato formal, pero ayuda en la práctica y el lector hará bien en adoptarla.

Para terminar, digamos que si $f: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es una función de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$, el conjunto $\mathbb{A}$ se suele denominar ***dominio*** de la función y el conjunto $\mathbb{B}$ ***codominio*** de la función.

EJERCICIOS

1

Sean $\mathbb{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ *y* $\mathbb{B} = \{a, b, c, d\}$ *Decir cuales de las siguientes correspondencias son funciones de* $\mathbb{A}$ *en* $\mathbb{B}$

■ a) $f(1) = a \qquad f(3) = c$
$\quad f(2) = b$

■ b) $f(1) = c \qquad f(3) = c$
$\quad f(2) = c \qquad f(4) = c$

■ c) $f(1) = a \qquad f(3) = c \qquad f(1) = c$
$\quad f(2) = c \qquad f(4) = d \qquad f(4) = a$

2

Decir cuál es el mayor conjunto $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ para el cual cada una de las siguientes correspondencias es función de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{R}$:

★ a) $f(x) = \sqrt{x}$;

★ b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

★ c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{2 - 3x}$;

★ d) $f(x) = \dfrac{3^{x^2} - 4}{2(x^2 - 1)^x - 2}$;

★ e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;

★ f) $f(x) = \dfrac{2x}{x + 4}$

★ g) $f(x) = \dfrac{x^{3/4} - 1}{(x^2 - 9)^{3/2} - 1}$

★ h) $f(x) = \dfrac{(1 - x^2)^{7/2} + 2/(x - 1)}{4^{x-1} - 2}$

★ i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$

★ j) $f(x) = \sqrt{4 - 4x^2}$

★ k) $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{x^2 + 2x}}{2^{-2x+2} - 1}$

★ l) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5^{x^2} - 5}}{2^x + 4}$

(Este tipo de problemas se suele plantear así: "Hallar el *dominio* de las siguientes funciones: ...")

2.2. REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES; LA FUNCION LINEAL

En el capítulo anterior hemos visto como se puede representar a $\mathbb{R}$, conjunto de los números reales, sobre una recta y dijimos que dicha representación resultaba de mucha ayuda como ilustración o como sugerencia pero que no iba a aparecer en la demostración formal de las diversas propiedades que vayamos viendo.

Basándonos en esa idea, vamos a ver ahora como se puede obtener una imagen geométrica de las funciones de $A \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

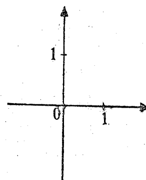
Consideremos en primer término el siguiente conjunto:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

es decir, $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los pares de números reales, tomados estos pares en un cierto orden (así, una cosa es el par ordenado (1,2) y otra cosa el par ordenado (2,1).

Este conjunto se puede representar sobre un *plano* de la siguiente manera: consideremos una recta horizontal y una recta vertical en un plano. Sobre cada una de ellas se puede representar a $\mathbb{R}$ con tal de fijar qué punto corresponde al 0 y qué punto al 1.

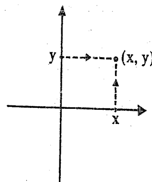
Pues bien, fijamos el 0 de ambas rectas en el punto de intersección de ellas, el 1 de la recta horizontal a la derecha del 0 y el 1 de la recta vertical sobre el 0.

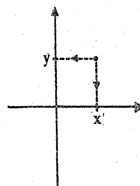


Ahora, dado un par ordenado cualquiera $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ le asignamos un punto del plano de la siguiente manera: partiendo del punto en la recta horizontal que representa a x subimos una recta vertical y partiendo del punto de la recta vertical que representa a y trazamos una recta horizontal. El punto en donde se corten estas dos nuevas rectas será el que represente al par ordenado (x, y).

Recíprocamente, dado un punto cualquiera del plano, ese punto representa a un cierto par ordenado (x, y); x e y se obtienen viajando verticalmente y horizontalmente a partir del punto dado hasta cortar a la recta horizontal inicial y a la recta vertical inicial.

Esta forma de representar a $\mathbb{R}^2$ en un plano es tan usual que muchas veces, en el lenguaje, no distinguimos el par ordenado del punto del plano que lo representa (y así hablaremos de "el punto (x, y)" en lugar de "el par ordenado (x, y)").





¿Por qué hablar de $\mathbb{R}^2$ en el capítulo de funciones? Pues porque el tener una función $f: A \to \mathbb{R}$ (con $A \subset \mathbb{R}$) automáticamente nos da un cierto subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que ahora vamos a describir; ese subconjunto se suele denominar ***gráfico de* f** y se define de la siguiente manera:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f(x)\}$$

o sea **Graf (f)** es el conjunto de todos los pares ordenados que se obtienen tomando como primer elemento un x cualquiera de A y como segundo elemento el $f(x)$ que le corresponde a x por la función dada.

Por ejemplo, si $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (aquí $A = \mathbb{R}$) es la función $f(x) = x^2$, entonces algunos elementos de **Graf (f)** son:

$$(1, 1), (2,4), (-1,1), (3,9), (7,49), \text{ etc.}$$

(no podemos ponerlos todos pues hay infinitos) y en general todos los pares ordenados de la forma (x, x^2) para x variando en $\mathbb{R}$. Un elemento de $\mathbb{R}^2$, por ejemplo, que *no* pertenece a **Graf(f)** es $(2,5)$ ya que 5 no es igual a 2^2

Ya que, para una función dada, **Graf(f)** es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y ya que $\mathbb{R}^2$ se puede representar geométricamente sobre un plano, entonces **Graf(f)** *se puede representar geométricamente como un subconjunto del plano.* Dicha representación, el dibujo que así resulte, se denomina ***representación gráfica*** de la función **f**.

Vamos a dar un ejemplo de esto estudiando un tipo particular de funciones; nos referimos a las *funciones lineales* que son aquellas de la forma

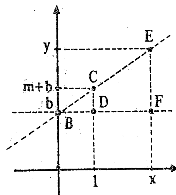
$$f(x) = mx + b$$

para m y b números reales cualesquiera.

Ejemplos: $f(x) = 3x - 1$, $f(x) = 7x + \frac{5}{2}$, $f(x) = \sqrt{2}\,x + 6$, etc. (Para ser más precisos, una función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice lineal si existen números reales m y b tales que $f(x) = mx + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$).

El gráfico de la función lineal $f(x) = mx + b$ consiste de todos los pares ordenados de la forma $(x, mx + b)$ para x variando en $\mathbb{R}$. Vamos a ver que su representación en el plano es una recta. Para ello consideremos los pares $(0, b)$ y $(1, m+b)$ pertenecientes al gráfico de la funcion considerada, consideremos los puntos B y C correspondientes en el plano y tracemos la recta que los une.

Afirmamos que dicha recta es la representación gráfica de $f(x) = mx + b$; en efecto, para un valor cualquiera de x elevamos una recta vertical por el punto correspondiente hasta cortar a la recta trazada y por



esa intersección trazamos una recta horizontal hasta cortar al eje vertical en un punto que corresponderá a un número real **y**

Los triángulos $\overset{\Delta}{BCD}$ y $\overset{\Delta}{BEF}$ son claramente semejantes y entonces será $\frac{\overline{EF}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BD}}$ pero $\overline{EF}$ es $y - b$, $\overline{CD}$ es $m + b - b = m$, $\overline{BF}$ es x y $\overline{BD}$ es 1. En definitiva:

$$\frac{y-b}{m} = \frac{x}{1}$$

de donde resulta: $y = mx + b$. Luego el punto **E** (punto de la recta trazada) no es otra cosa que el punto correspondiente al par $(x, mx + b)$, par que a su vez está en Graf (f). Haciendo esto para todo número real x, vemos que la representación gráfica de f es justamente la recta trazada.

La argumentación anterior no responde a los requisitos de rigor que habíamos prometido en el Capítulo I ya que estamos razonando sobre un dibujo particular y sacando conclusiones generales.

Por lo tanto, el hecho de que la representación gráfica de la función lineal sea una recta no puede figurar como un Teorema aquí demostrado (aunque creemos que el lector debe haberse convencido totalmente de la verdad de ese hecho).

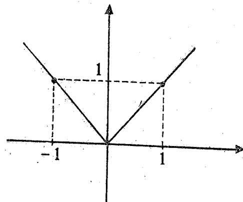
Este tipo de situaciones se nos presentará muy seguido, y convendremos desde ahora (sin repetirlo después en cada caso) que ninguna de las argumentaciones que demos en favor de una cierta representación gráfica será una demostración formal; lo cual no significa que haya que descuidar esos argumentos (muy por el contrario, hay que seguirlos con todo detalle y entenderlos).

Consideremos ahora la función $f: R \to R$ dada por $f(x) = |x|$; entonces

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Entonces para $x \geq 0$ es $f(x) = x$; luego para esos valores de x, f es una función lineal y su representación es una recta (o una parte de una recta). Para $x < 0$ es $f(x) = -x$; luego para esos valores de x, f es una función lineal (caso $m = -1$ y $b = 0$) y su representación también es parte de una recta.

Considerando algunos pares ordenados de Graf (f) (por ejemplo (0,0), (1,1) y (−1,1)), es fácil darse cuenta de que la representación gráfica de $f(x) = |x|$ es la siguiente:



EJERCICIOS

1

Representar en el plano los pares ordenados (2,4) (−1,3), (2,−1), (−2,−3), (0,1), (0,−2), (3,0), (−1,0).

2

♦ a) *Decir cuáles de los siguientes pares ordenados pertenecen al gráfico de la función* $f: R \to R$ *dada por* $f(x) = x^2 + 2x - 3$:

(1,0), (2,4), (3,12), (−2,−3), (0,3), (−1,−4)

♦ b) *Análogamente para* $f(x) = \frac{2x+1}{3+|x-2|}$ *y los pares*

(0,1/3), (2,5/3), (−1,4), (3,7), (1,3/4)

3

Representar gráficamente las siguientes funciones lineales:

★ a) $f(x) = x - 1$ ★ d) $f(x) = -2x+1$

★ b) $f(x) = 2x - 3$ ★ e) $f(x) = 4x + 1$

★ c) $f(x) = -x + 2$ ★ f) $f(x) = -5x + 4$

SUGERENCIA: como se sabe que es una recta, con tomar dos pares ordenados en Graf (f) alcanza).

4

Representar gráficamente las siguientes funciones:

- a) $f(x) = 2|x|$
- b) $f(x) = |x-1|$
- c) $f(x) = |2x+2|$
- d) $f(x) = 3|x-4|+2$
- e) $f(x) = |6-2x|-5$
- f) $f(x) = |x+1| + |x-2|$
- g) $f(x) = 2|x-2| + 3|x+1|$
- h) $f(x) = |3x-4| + 2|4x+1|$
- i) $f(x) = 2x + |x|$
- j) $f(x) = 6x + 3 + |x-1| + |3-x|$
- k) $f(x) = -2x + |4x-1| + |2-x|$
- l) $f(x) = 3x + |2x-1| - |5x-2|$

5

▲ a) Hallar la función lineal cuyo gráfico contiene a los pares (1,2) y (2,5).

(SUGERENCIA: debe ser $2 = m.1+b$ y $5 = m.2+b$)

▲ b) Idem para (2,4) y (−1,2)

▲ c) Idem para (0,−2) y (−1,1)

6

Sea f una función lineal cualquiera. Probar que cualquiera sean los números reales x y x', vale

$$f(x + x') = f(x) + f(x') - f(0)$$

7

Probar que no existe ninguna función lineal cuyo gráfico contenga a los pares (1,3), (2,4) *y* (−1,1)

2.3

FUNCIONES POLINOMICAS

Las funciones lineales son un caso particular de las llamadas *funciones polinómicas*, que son aquellas $f: R \to R$ de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

para ciertos números reales $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. O sea, una función es polinómica si existen números reales $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tales que para todo $x \in R$ vale (1).

Por ejemplo, la función dada por $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ es polinómica (es $n = 2, a_2 = 3, a_1 = 2, a_0 = -1$); también la función constantemente igual a 2, f(x) = 2 para todo $x \in R$, es polinómica (es $n = 0$, $a_0 = 2$).

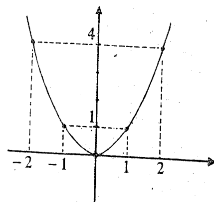
Las funciones polinómicas más simples son las de la forma:

$$f(x) = x^n$$

donde n es algún número natural fijo. Si n es igual a 1 obtenemos una función lineal (caso $m = 1$, $b = 0$) y sabemos que su representación gráfica es una recta. Para $n = 2$ obtenemos la función $f(x) = x^2$; esta función tiene la propiedad de que, si $0 < x < x'$, entonces $f(x) < f(x')$ por ejercicio 4) 9) del parágrafo 1.2. (o se

cuando crece x, crece $f(x)$ mientras x sea positivo)

Si $x < x' < 0$, entonces multiplicando por -1 resulta $-x > -x' > 0$ o sea $0 < -x' < -x$; luego $f(-x') < f(-x)$ pero como $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, resulta $f(x') < f(x)$ (o sea, cuando crece x, decrece $f(x)$ mientras x sea negativo).



Con esta información, y tomando algunos pares ordenados de Graf (f) (por ejemplo, $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(2,4)$, $(-2,4)$) y representándolos en el plano es fácil convencerse de que su representación gráfica es aproximadamente la que hemos dibujado.

Pasemos ahora al caso $n = 3$, o sea $f(x) = x^3$

Si suponemos $0 < x < x'$, entonces multiplicando la desigualdad $x < x'$ por los números positivos x^2 xx' y x'^2 obtenemos las desigualdades:

$$x^3 < x^2 x'$$

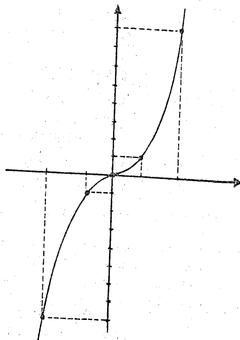
$$x^2 x' < x\, x'^2$$

$$x x'^2 < x'^3$$

de las cuales concluimos que $x^3 < x'^3$, o sea $f(x) < f(x')$. Luego cuando crece x crece $f(x)$ (por ahora, mientras x sea positivo).

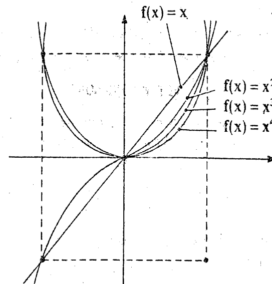
Si $x < x' < 0$, entonces multiplicando por -1 obtenemos $0 < -x' < -x$; estamos ahora en el caso anterior y por tanto será $(-x')^3 < (-x)^3$, es decir $-x'^3 < -x^3$, luego $x^3 < x'^3$ que es lo mismo que decir que $f(x) < f(x')$. Luego también para valores negativos de x resulta que si crece x entonces crece $f(x)$.

Con esa información, considerando algunos pares ordenados de Graf (f), como ser $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$, $(2,8)$, $(-2,-8)$ y representándolos en el plano, podemos dibujar la representación gráfica de $f(x) = x^3$



Es fácil demostrar que la función $f(x) = x^n$ tiene el mismo comportamiento para n par que la función $f(x) = x^2$ (decrece cuando crece x y es negativo, crece cuando crece x y es positivo) y para n impar el mismo comportamiento que $f(x) = x^3$ (Ejercicio 1 de este parágrafo). Indicamos la representación gráfica comparada de algunas de estas funciones:

La representación gráfica aproximada de una función polinómica cualquiera encierra dificultades que sólo vamos a resolver más adelante, así que posponemos por ahora la cuestión.



Hay un tema relacionado con las funciones polinómicas que podemos tratar ahora; antes de entrar en materia, demostraremos un lema auxiliar:

LEMA 2.2.

****

Sean $n \in N$ y sean a, x números reales cualesquiera. Entonces vale

$$x^n - a^n = (x-a) \sum_{h=1}^{n} x^{n-h} a^{h-1}$$

(o sea, $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2} a + x^{n-3} a^2 + \dots + x a^{n-2} + a^{n-1})$)

****

Demostración: Es cuestión de efectuar el producto indicado:

$$(x-a) \sum_{h=1}^{n} x^{n-h} a^{h-1} = x \sum_{h=1}^{n} x^{n-h} a^{h-1} - a \sum_{h=1}^{n} x^{n-h} a^{h-1} =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} x^{n-h+1} a^{h-1} - \sum_{h=1}^{n} x^{n-h} a^{h} =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} x^{n-(h-1)} a^{h-1} - \sum_{h=1}^{n} x^{n-h} a^{h} =$$

(llamando $k=h-1$) $= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} a^k - \sum_{h=1}^{n} x^{n-h} a^h$

En esta última expresión, separamos los términos correspondientes a $k=0$ y a $h=n$, con lo que queda:

$$(x-a) \sum_{h=1}^{n} x^{n-h} a^{h-1} = x^n + \sum_{k=1}^{n-1} x^{n-k} a^k - \sum_{h=1}^{n-1} x^{n-h} . a^h - a^n$$

Ahora bien, el segundo y tercer sumando del segundo miembro se simplifican

($\sum_{k=1}^{n-1} x^{n-k} a^k$ es igual a $\sum_{h=1}^{n-1} x^{n-h} a^h$ y también es igua' a $\sum_{f=1}^{n-1} x^{n-f} a^f$; el nombre que se le de al índice de sumación no tiene importancia. Esas tres sumas significan $x^{n-1} a + x^{n-2} a^2 + \dots + x^2 a^{n-2} + x a^{n-1}$). En definitiva

$$(x-a) \sum_{h=1}^{n} x^{n-h} a^{h-1} = x^n - a^n$$

que es lo que queríamos demostrar.///

Supongamos ahora que f es una función polinómica; entonces existirá un número natural o nulo, n, y números reales a_0, a_1, . . ., a_n tales que, para todc $x \in R$:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Si $a_n \neq 0$, se acostumbra llamar *grado* de f al número n. Así, por ejemplo, las funciones lineales tiene grado 1, la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ tiene grado 2 etc.

La primera cosa que nos tiene que preocupar es si una función polinómica tiene o no un *único* grado. En

otras palabras, si una función polinómica f se puede escribir, por ejemplo, como $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ (con lo cual tendrá grado 2) ¿no habrá números reales a_0, a_1, a_2 y a_3 con $a_3 \neq 0$ tales que sea $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ para todo $x \in R$? (con lo cual también tendría grado 3).

Vamos a ver ahora que no, que una función polinómica tiene un único grado; mientras tanto no desechamos la posibilidad de que tenga varios, pero aún así tiene sentido decir que tenga grado 3, por ejemplo, eso quiere decir que se puede escribir en la forma $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con $a_3 \neq 0$ y quizás, aunque enseguida veremos que no, de otras formas.

Comenzamos con el siguiente resultado:

PROPOSICION 2.3.

Sea f una función polinómica de grado n. Si d es un número real cualquiera, entonces existen una función polinómica g de grado n–1 y un número real b tales que, para todo $x \in R$:

$$f(x) = (x - d)\, g(x) + b$$

Demostración: Lo hacemos por inducción sobre n. Supongamos que f es de grado 1; entonces existen números reales a_0 y a_1 tales que, para todo número real x es:

$$f(x) = a_1 x + a_0$$

siendo $a_1 \neq 0$. Pero entonces podemos escribir:

$$f(x) = a_1 x - a_1 d + a_1 d + a_0 = a_1(x - d) + a_1 d + a_0$$

y basta tomar $g(x) = a_1$ (para todo x; es la función constantemente igual a a_1 que tiene grado 0 por definición) y $b = a_1 d + a_0$.

Supongamos ahora que la propiedad es cierta para funciones polinómicas de grado n y sea f una función polinómica de grado n+1. Entonces existirán números reales $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$, tales que

$$f(x) = a_{n+1} x^{n+1} + a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

(para todo $x \in R$).

Sumando y restando el número $a_{n+1} d^{n+1}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_{n+1} x^{n+1} - a_{n+1} d^{n+1} + a_{n+1} d^{n+1} + a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \\ &= a_{n+1}(x^{n+1} - d^{n+1}) + (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 + a_{n+1} d^{n+1}) \\ \text{(Lema 2.2)} &= a_{n+1}(x - d)(x^n + x^{n-1} d + \ldots + x d^{n-1} + d^n) + (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 + a_{n+1} d^{n+1}) \\ &= a_{n+1}(x - d) f_1(x) + f_2(x) \end{aligned}$$

Ahora bien, $f_2(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 + a_{n+1} d^{n+1}$ es una función polinómica de grado n. Luego, por hipótesis inductiva, podremos escribir:

$$f_2(x) = (x - d) f_3(x) + b$$

donde f_3 es alguna función polinómica de grado $n - 1$ y b es algún número real. En definitiva:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_{n+1}(x-d) f_1(x) + (x-d) f_3(x) + b \\ &= (x-d)(a_{n+1} f_1(x) + f_3(x)) + b \\ &= (x-d) g(x) + b \end{aligned}$$

Ahora bien, $g(x) = a_{n+1} f_1(x) + f_3(x)$ es la suma de una función polinómica de grado n ($a_{n+1} f_1(x)$) y una función polinómica de grado n–1 ($f_3(x)$). Luego g(x) es una función polinómica de grado n, con lo cual la Proposición queda demostrada.///

Si f es una función polinómica, se dice que un número real d es *raíz* de f si se verifica $f(d) = 0$. Así, por ejemplo, 2 es raíz de $f(x) = x^2 - 3x + 2$ (ya que $f(2) = 2^2 - 3.2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$) pero 3 *no* es raíz (pues $f(3) = 3^2 - 3.3 + 2 = 9 - 9 + 2 \neq 0$).

Con ayuda de la Proposición 2.3. es fácil encontrar una condición necesaria y suficiente para que un número real dado sea raíz de una función polinómica dada:

PROPOSICION 2.4.

Sea f una función polinómica de grado n y sea d un número real. Entonces d es raíz de f si y sólo si existe una función polinómica g de grado n – 1 tal que, para todo $x \in R$:

$$f(x) = (x - d)\, g(x)$$

Demostración: Supongamos primero que d es raíz de f. Sabemos, por la Proposición 2.3 que existen una función polinómica g de grado $n - 1$ y un número real b tales que, para todo x real:

$$f(x) = (x - d)\, g(x) + b$$

Como d es raíz de f, será:

$$0 = f(d) = (d - d)\, g(d) + b = 0 \,.\, g(d) + b = 0 + b = b$$

luego $b = 0$ y entonces $f(x) = (x - d)\, g(x)$ como queríamos demostrar.

Recíprocamente, supongamos que existe g tal que $f(x) = (x - d)\, g(x)$; entonces $f(d) = (d - d)\, g(d) = 0 \,.\, g(d) = 0$, luego d es raíz de f.///

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado clave:

PROPOSICION 2.5.

Si f es una función polinómica de grado n, entonces f no puede tener más de n raíces.

Demostración: Por inducción sobre n. Si f tiene grado 1, entonces será, para todo $x \in R$:

$$f(x) = mx + b \qquad (m \neq 0)$$

Si d_1 y d_2 son raíces de f, entonces

$$0 = f(d_1) = md_1 + b$$

$$0 = f(d_2) = md_2 + b$$

Restando ambas igualdades:

$$0 = f(d_1) - f(d_2) = md_1 + b - md_2 - b = md_1 - md_2 = m(d_1 - d_2)$$

y como $m \neq 0$, entonces $d_1 - d_2 = 0$, es decir $d_1 = d_2$. Luego no puede haber dos raíces *distintas* de f.

Supongamos ahora que la Proposición es verdadera para un cierto número natural n y sea f una función polinómica de grado n+1. Si $d_1, d_2, \ldots, d_{n+2}$ fuesen raíces (distintas) de f, entonces siendo d_{n+2} raíz por la Proposición 2.4. podremos escribir:

$$f(x) = (x - d_{n+2})\, g(x)$$

donde g es una función polinómica *de grado* n. Si d_i es cualquiera de los números $d_1, \ldots, d_n, d_{n+1}$, entonces será:

$$0 = f(d_i) = (d_i - d_{n+2})\, g(d_i)$$

y como $d_i - d_{n+2} \neq 0$ (pues estamos suponiendo que las raíces son distintas entre sí) entonces debe ser $g(d_i) = 0$. Luego $d_1, \ldots, d_n, d_{n+1}$ serían raíces de g lo cual niega la hipótesis inductiva (pues g sería una función polinómica de grado n con más de n raíces) Luego f no puede tener más de n+1 raíces, lo cual termina de probar la Proposición.///

COROLARIO 2.6.

Supongamos que una función polinómica f tiene grados m y n. Entonces $m = n$.

Demostración: Supongamos $m \neq n$. Entonces uno de los dos es mayor que el otro, digamos $m > n$. Luego será $m = n + p$ para un cierto número natural p.

Por tener f grados m y n se podrá escribir:

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

$= b_{n+p}x^{n+p} + \dots + b_{n+1}x^{n+1} + b_n x^n + \dots +$

$+ b_1 x + b_0$

(con $a_n \neq 0 \neq b_{n+p}$) y por lo tanto:

$0 = b_{n+p}x^{n+p} + \dots + b_{n+1}x^{n+1} + b_n x^n + \dots +$

$+ b_1 x + b_0 - (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0)$

$= b_{n+p}x^{n+p} + \dots + b_{n+1}x^{n+1} + (b_n - a_n)x^n + \dots +$

$+ (b_1 - a_1)x + (b_0 - a_0)$

y esta igualdad vale para todo $x \in R$. Entonces la función

$g(x) = b_{n+p}x^{n+p} + \dots + b_{n+1}x^{n+1} + (b_n - a_n)x^n +$

$+ \dots + (b_1 - a_1)x + (b_0 - a_0)$

es polinómica de grado $n+p$ (ya que $b_{n+p} \neq 0$) y vale cero para todo $x \in R$ con lo cual tiene más de $n+p$ raíces (todo número real es raíz y hay infinitos números reales), contra la Proposición 2.5. Luego no puede ser $n \neq m$ y el Corolario queda probado.///

EJERCICIOS

1

● a) *Probar que la función $f(x) = x^{2n-1}$ crece cuando crece x (o sea, si $x < x'$ entonces $f(x) < f(x')$; hacer inducción sobre n).*

● b) *Probar que la función $f(x) = x^{2n}$ crece cuando crece x y es positivo (o sea, si $0 < x < x'$ entonces $f(x) < f(x')$) y decrece cuando crece x y es negativo (o sea, si $x < x' < 0$ entonces $f(x) > f(x')$).*

2

★ a) Probar que una función de grado 1 siempre tiene exactamente una raíz.

★ b) Probar que si $a \neq 0$ y b y c son números reales cualesquiera, entonces para todo $x \in R$ vale que

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

(esto se llama "completación de cuadrados")

★ c) Deducir de b) que la función (de grado 2) $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene dos raíces si $b^2 - 4ac > 0$, una si $b^2 - 4ac = 0$ y ninguna si $b^2 - 4ac < 0$.

3

Sea f la función de grado 2 dada por $f(x) = x^2 - 3x + 2$

♦ a) Verificar que 1 es raíz de f

♦ b) Encontrar una función polinómica g de grado 1 tal que $f(x) = (x-1)g(x)$.

4

Sea f la función de grado 3 dada por $f(x) = x^3 + 1$

▲ a) *Verificar que -1 es raíz de f*

▲ b) *Encontrar una función polinómica g de grado 2 tal que $f(x) = (x+1)g(x)$.*

5

Encontrar todas las funciones polinómicas de grado 3 cuyas raíces sean $1, -1$ y 2.

6

■ a) Sean f y g funciones polinómicas de grado n con las mismas raíces $d_1, \dots, d_n$. Probar que existe un número real C tal que $f(x) = C\,g(x)$ para todo $x \in R$.

■ b) ¿Por qué la conclusión anterior no vale para las funciones $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ que tienen la misma raíz -1?

7

Una función $f: R \to R$ se dice que es par si es $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in R$ (Ejemplos: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$, etc.) y se dice que es impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in R$

(Ejemplos: $f(x) = x$, $f(x) = x^3$, etc.)

● a) *Probar que las funciones $f(x) = x^2 + 3$, $f(x) = |x| + x^4$ y $f(x) = 4$ son pares.*

● b) *Probar que las funciones $f(x) = 2x^3 + 3x$ y $f(x) = x^5 - 2x^3$ son impares.*

● c) *Probar que la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ no es ni par ni impar.*

(SUGERENCIA: suponer que sí y llegar a contradecir la Proposición 2.5)

● d) *¿Qué propiedad de simetría tiene la representación grafica de una función par? ¿y la de una función impar?*

8

Sean f y g funciones polinómicas de grados n y m respectivamente:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$

Probar que si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in R$ entonces $n = m$ y además $a_i = b_i$ para todo i entre 1 y n (Sugerencia: aplicar 2.5 a la función $x \to f(x) - g(x)$)

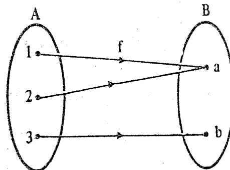
2.4.

FUNCIONES INYECTIVAS Y SURYECTIVAS

Volvemos en este parágrafo al caso general de funciones $f: A \to B$, donde A y B son conjuntos cualesquiera (y no necesariamente subconjuntos de R). Queremos decir ahora qué es lo que se entiende por función *inyectiva*, para lo cual comenzamos con un ejemplo.

Consideremos los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$ y sea $f: A \to B$ la correspondencia definida por

$f(1) = a, \quad f(2) = a, \quad f(3) = b$



De acuerdo con la definición 2.1., esta correspondencia *es* una función de A en B, no importa que al 1 y al 2 les corresponda el mismo elemento (la letra a). Es una función, sí, pero *no es inyectiva*. Es decir, para que una función sea inyectiva, no debe haber dos elementos distintos de A a los cuales, por la función, les corresponda el mismo elemento de B.

Puesto en términos más precisos, una función $f: A \to B$ será inyectiva si vale la siguiente implicación: "si $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$"

Esta afirmación es lógicamente equivalente a la siguiente: si dos elementos de A van a parar, por la función, al mismo elemento de B, entonces esos dos elementos no son dos sino uno solo, son iguales entre sí.

La formulación precisa de esta última afirmación será nuestra definición oficial de inyectividad:

DEFINICION 2.7.

Una función $f: A \to B$ se dice *inyectiva* si tiene la siguiente propiedad:

"si $x_1, x_2 \in A$ son tales que $f(x_1) = f(x_2)$ entonces debe ser $x_1 = x_2$"

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

O sea, la igualdad $f(x_1) = f(x_2)$ nos debe poder permitir, en el caso en que la función sea inyectiva, deducir la igualdad $x_1 = x_2$.

EJEMPLOS

1

Consideremos la función $f: R \to R$ definida por:

$$f(x) = 3x + 2$$

Veamos si es inyectiva: la igualdad $f(x_1) = f(x_2)$ significa:

$$3x_1 + 2 = 3x_2 + 2$$

simplificando el 2:

$$3x_1 = 3x_2$$

y simplificando el 3:

$$x_1 = x_2$$

Como a partir de la igualdad $f(x_1) = f(x_2)$ hemos podido deducir la igualdad $x_1 = x_2$, entonces esta función *sí* es inyectiva.

2

¿Cuándo *no* se puede deducir, de la igualdad $f(x_1) = f(x_2)$ la igualdad $x_1 = x_2$? Consideremos por ejemplo la función $f: R \to R$ dada por:

$$f(x) = 3x^2 + 1$$

Nos disponemos a recorrer el mismo camino que en el ejemplo anterior; la igualdad $f(x_1) = f(x_2)$ significa, en este caso:

$$3x_1^2 + 1 = 3x_2^2 + 1$$

Simplificando el 1

$$3x_1^2 = 3x_2^2$$

y simplificando el 3:

$$x_1^2 = x_2^2$$

Si ahora tomamos raíz cuadrada positiva, entonces no obtenemos $x_1 = x_2$ sino (ver Proposición 1.45):

$$|x_1| = |x_2|$$

y de acá *no* se deduce que x_1 sea igual a x_2. Por ejemplo, si $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$, entonces es $|x_1| = |x_2|$ pero $x_1 \neq x_2$.

Cuando se llega a este punto, se reconoce que la función *no* es inyectiva, y la manera de demostrarlo es simplemente dar un par de valores (distintos) a x de manera que por la función vayan a parar al mismo elemento. El ejemplo recién dado sirve:

$$f(2) = 3.2^2 + 1 = 3.4 + 1 = 13$$

$$f(-2) = 3.(-2)^2 + 1 = 3.4 + 1 = 13$$

Luego esta función *no* es inyectiva.

3

Compliquemos un poquito las cosas. Consideremos la función $f: R \to R$ dada por:

$$f(x) = 2x + |x|$$

Siempre empezamos de igual manera. La igualdad $f(x_1) = f(x_2)$ significa:

$$2x_1 + |x_1| = 2x_2 + |x_2|$$

Acá no podemos simplificar nada, pero la aparición de las barras de módulo nos indican que debemos separar la discusión en los siguientes casos:

★ i) $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$

En este caso, por la definición, 1.44 de módulo, será:

$$2x_1 + x_1 = 2x_2 + x_2$$

o sea:

$$3x_1 = 3x_2$$

de donde:

$$x_1 = x_2$$

Si este fuese el único caso posible, ya tendríamos demostrada la inyectividad de la función, pues de $f(x_1) = f(x_2)$ habríamos llegado a la deseada igualdad $x_1 = x_2$. Como hay otras posibilidades, posponemos nuestro juicio y seguimos.

★ ii) $x_1 < 0, \ x_2 < 0$

En este caso, por la definición 1.44 de modulo, será:

$$2x_1 + (-x_1) = 2x_2 + (-x_2)$$

o sea:

$$x_1 = x_2$$

así que en este caso también llegamos a la igualdad buscada.

★ iii) $x_1 \geqslant 0, x_2 < 0$

En este caso resulta:

$$2x_1 + x_1 = 2x_2 + (-x_2)$$

o sea:

$$3x_1 = x_2 \qquad (1)$$

Esto no puede ser; dentro de nuestras suposiciones, el primer miembro de (1) es $\geqslant 0$ y el segundo es < 0, con lo cual no pueden ser iguales.

En otras palabras, si es $f(x_1) = f(x_2)$ para este ejemplo, no puede ser que sea $x_1 \geqslant 0$ y $x_2 < 0$ Esta posibilidad debe descartarse.

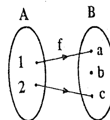
★ iv) $x_1 < 0, x_2 \geqslant 0$

Esta posibilidad se descarta por los mismos argumentos que la anterior. ¿Cuál es, entonces la conclusión? Pues que la función sí es inyectiva y el razonamiento es el siguiente: si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces sólo caben (como acabamos de ver) dos posibilidades; que los dos, x_1 y x_2, sean mayores o iguales que cero, o que los dos sean menores que cero, *y en ambos casos resulta ser* $x_1 = x_2$. Luego es cierto que la igualdad $f(x_1) = f(x_2)$ implica la igualdad $x_1 = x_2$.

Pasamos ahora a otro concepto; consideremos los conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ y la correspondencia f entre A y B definida por:

$f(1) = a$

$f(2) = c$



De acuerdo a la Definición 2.1., esta correspondencia *es* una función de A en B, no importa que haya un elemento de B (la letra b) al cual no vaya a parar nadie por la función. Es una función, sí, pero *no es suryectiva.*

En otras palabras, una función $f: A \to B$ será suryectiva cuando todo elemento de B sea alcanzado por algún elemento a traves de la función. Es fácil darse cuenta de que lo que escribimos ahora es la misma idea puesta en otras palabras:

DEFINICION 2.8.

Una función $f: A \to B$ se dice *suryectiva* si tiene la siguiente propiedad: "cualquiera sea $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$".

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

O sea, la función será suryectiva si para todo $b \in B$ uno puede encontrar algún $a \in A$ que verifique $f(a) = b$. ¿Cómo se encuentra ese a? Pues *despejándolo* de la ecuación $f(a) = b$; si se puede despejar cualquiera sea b, la función será suryectiva; si hay valores de b para los que no se puede despejar a, no lo será.

EJEMPLOS

1

Consideremos la función $f: R \to R$ dada por

$$f(x) = 3x + 2$$

Para ver si es suryectiva, debemos ver si es cierto que cualquiera sea $y \in \mathbb{R}$ (en este caso es $B = \mathbb{R}$) existe $x \in \mathbb{R}$ (en este caso $A = \mathbb{R}$) tal que $f(x) = y$. De acuerdo a lo dicho recién, planteamos la ecuación $f(x) = y$:

$$3x + 2 = y$$

Despejar x de aquí es muy sencillo; resulta ser:

$$x = \frac{y-2}{3} \qquad (2)$$

Afirmamos que este hecho, el haber podido despejar x, prueba la suryectividad de f. En efecto, cualquiera sea $y \in \mathbb{R}$, el x dado por (2) satisface $f(x) = y$. Verificación:

$$f(x) = f\left(\frac{y-2}{3}\right) = 3.\left(\frac{y-2}{3}\right) + 2 =$$

$$= (y-2) + 2 = y$$

2

¿Cómo nos damos cuenta de que *no* se puede despejar x de una ecuación $f(x) = y$? Consideremos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = 3x^2 + 1$$

La ecuación $f(x) = y$ significa, en este caso:

$$3x^2 + 1 = y$$

de donde:

$$x^2 = \frac{y-1}{3}$$

Para despejar x de aquí, hay que sacar raíz cuadrada. Pero para eso el *segundo miembro no debe ser negativo*, ya que los números negativos no tienen raíces cuadradas. Y el segundo miembro puede ser negativo; por ejemplo, si $y = 0$, el segundo miembro es $-\frac{1}{3}$

Esto nos muestra que no existe ningún $x \in \mathbb{R}$ tal que, por ejemplo, $f(x) = 0$, (pues, en ese caso, resultaría $x^2 = -\frac{1}{3}$), con lo cual la función $f(x) = 3x^2 + 1$, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, resulta *no* ser suryectiva.

3

Consideremos por último la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 2x + |x|$$

En este caso, la ecuación $f(x) = y$ es:

$$2x + |x| = y \qquad (3)$$

Como en el primer miembro aparece un módulo, hay que considerar las dos posibilidades de siempre. La ecuación (3) es:

$$\begin{cases} 2x + x = y & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 2x + (-x) = y & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

o sea:

$$\begin{cases} 3x = y & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ x = y & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \qquad (4)$$

de donde:

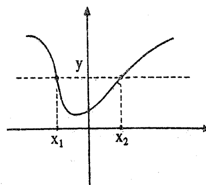
$$\begin{cases} x = y/3 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ x = y & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Afirmamos que de (4) se deduce la suryectividad de la función.

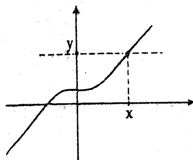
En efecto, si es $y \geqslant 0$, entonces tomando $x = y/3$ es $f(x) = y$ (verificación: al ser $y \geqslant 0$, $x = y/3$ también es $\geqslant 0$; luego $f(x) = f(y/3) = 2.\frac{y}{3} + \left|\frac{y}{3}\right| = 2.\frac{y}{3} + \frac{y}{3} = y$), y si es $y < 0$, tomando $x = y$ es $f(x) = y$ (verificación análoga). Luego esta función *es* suryectiva.

Si se conoce la representación gráfica de una función, entonces es muy fácil decidir a simple vista si es inyectiva o suryectiva.

En efecto, si hay dos valores de x, digamos x_1 y x_2, para los cuales la función vale lo mismo, digamos y (o sea, si la función no es inyectiva), entonces la recta horizontal que pasa por el punto correspondiente a (0, y) corta a la representación gráfica de la función en, por lo menos, dos puntos: (x_1, y) y (x_2, y).

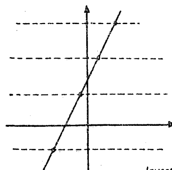


Luego la inyectividad se traduce gráficamente en que cada recta horizontal corte a la representación gráfica de la función en *a lo sumo* un punto. Por otra parte, para que la función sea suryectiva, *cada* recta horizontal debe cortar a la representación gráfica de

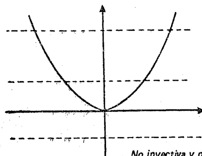


la función en *por lo menos* un punto (ya que de esa manera se encontraría, gráficamente, el x necesario para que sea $f(x) = y$).

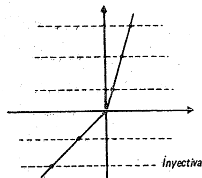
Teniendo en cuenta la representación gráfica de las tres funciones consideradas en los ejemplos, los resultados obtenidos resultan evidentes:



Inyectiva y suryectiva



No inyectiva y no suryectiva



Inyectiva y suryectiva

Para la última representación, notar que la función $y = 2x + |x|$ es la función $y = 3x$ para $x \geqslant 0$ y es $y = x$ para $x < 0$).

Sea o no suryectiva la función $f: A \to B$, llamaremos *imagen* de f, y lo indicaremos como $\text{Im}(f)$, al subcon-

junto de B formado por aquellos b para los cuales existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$; más brevemente:

$$Im(f) = \{b \in B: \text{existe } a \in A \text{ que cumple } f(a) = b\}$$

Con esta terminología, una función $f:A \to B$ es suryectiva si la imagen de f es todo el conjunto B.

Hallar la imagen de $f:A \to B$ se reduce al procedimiento siguiente: aquellos $b \in B$ para los cuales podemos despejar a de la ecuación $f(a) = b$ forman parte de la imagen de f; y aquellos b para los cuales no podemos hacer ese despeje, no.

Por ejemplo, si $f:R \to R$ es $f(x) = 3x^2 + 1$, la ecuación $f(x) = y$ se reduce a

$$x^2 = \frac{y-1}{3}$$

Para poder despejar x, debe ser $\frac{y-1}{3} \geqslant 0$ (son los únicos números que tienen raíz cuadrada). Pero eso es equivalente a que sea $y - 1 \geqslant 0$, o sea $y \geqslant 1$.

Luego, para la función $f(x) = 3x^2 + 1$, es $Im(f) = \{y \in R : y \geqslant 1\} = R_{\geqslant 1}$

EJERCICIOS

1

Hallar el dominio de las siguientes funciones (ver ejercicio 2 del parágrafo 2.1.) y decir si son o no inyectivas y/o suryectivas. Si no son suryectivas, hallar su imagen:

- a) $f(x) = 6x - 2$
- b) $f(x) = \sqrt{x+2}$
- c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
- d) $f(x) = \frac{1}{x}$
- e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 - 1}}$
- f) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$
- g) $f(x) = \frac{2x}{x + 4}$
- h) $f(x) = |x|$
- i) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
- j) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
- k) $f(x) = \frac{|x|}{1 + |x - 2|}$
- l) $f(x) = x^2 - 3x + 2$
- m) $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$

2

Decir cuáles funciones lineales son inyectivas y/o suryectivas.

3

Probar que una función creciente (cuando crece x, crece $f(x)$) es inyectiva.

Dar un ejemplo de una función creciente que no sea suryectiva.

2.5. COMPOSICION DE FUNCIONES Y FUNCIONES INVERSAS

Supongamos tener tres conjuntos A, B y C, y dos funciones $f:A \to B$, $g:B \to C$.

Si a es un elemento cualquiera de A, por f le corresponderá un elemento $f(a)$; como $f(a)$ es un elemento de B, entonces por g le corresponderá un elemento de C que será naturalmente, $g(f(a))$.

Esto nos define una correspondencia de A en C, la que lleva a en $g(f(a))$, esta correspondencia se denomina *composición* de g y f y se denota por $g \circ f$. Más precisamente:

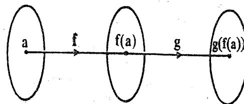
DEFINICION 2.9.

Sean A, B, y C tres conjuntos y sean

$$f:A \to B, \quad g:B \to C$$

dos funciones. La composición de g y f es la función de A en C, $g \circ f$ definida por:

$$(g \circ f)\ (a) = g(f(a))$$



EJEMPLOS

1

Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $f:A \to B$ definida por:

$$f(1) = a$$
$$f(2) = b$$
$$f(3) = a$$
$$f(4) = c$$

y $g: B \to C$ definida por

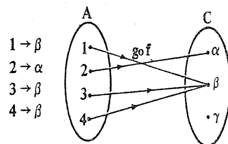
$$g(a) = \beta$$
$$g(b) = \alpha$$
$$g(c) = \beta$$

Entonces la composición $g \circ f$ es:

$$(g \circ f)\ (1) = g(f(1)) = g(a) = \beta$$
$$(g \circ f)\ (2) = g(f(2)) = g(b) = \alpha$$

$$(g \circ f)\ (3) = g(f(3)) = g(a) = \beta$$
$$(g \circ f)\ (4) = g(f(4)) = g(c) = \beta$$

o sea $g \circ f : A \to C$ es la función:



2

Consideremos $f:R \to R$ definida por:

$$f(x) = 3x^2 - 4$$

y $g:R \to R$ definida por

$$g(x) = 7x + 2$$

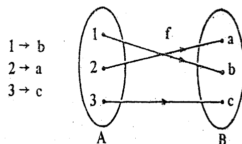
Entonces la función $g \circ f$ es:

$$(g \circ f)\ (x) = g(f(x)) = g(3x^2 - 4) =$$
$$7.(3x^2 - 4) + 2$$
$$= 21\,x^2 - 28 + 2 =$$
$$= 21\,x^2 - 26$$

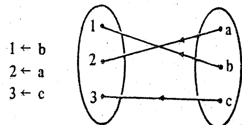
Notemos que en este caso también podemos hacer la composición en el otro sentido, es decir $f \circ g$. Esta función es:

$$(f \circ g)\ (x) = f(g(x)) = f(7x + 2) = 3(7x + 2)^2 - 4 =$$
$$= 3(49x^2 + 28x + 4) - 4 =$$
$$= 147\,x^2 + 84\,x + 12 - 4 =$$
$$= 147\,x^2 + 84\,x + 8$$

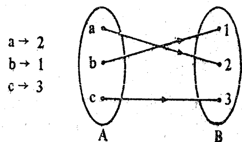
Queremos definir ahora la *inversa* de una función. Hablando sin precisión, si tenemos una función de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, la correspondencia inversa es la que se obtiene dando vuelta las flechas. Por ejemplo, si $\mathbf{A} = \{1, 2, 3\}$, $\mathbf{B} = \{a, b, c\}$ y $f: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ está dada por:



entonces la correspondencia inversa está dada por:



o para ponerlo en la forma acostumbrada:



Desde luego que "dar vuelta las flechas" no es una definición adecuada; para llegar a ella, llamemos $g: \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ a la función inversa así obtenida y notemos que:

$$g \circ f\,(1) = g(f(1)) = g(b) = 1$$
$$g \circ f\,(2) = g(f(2)) = g(a) = 2$$
$$g \circ f\,(3) = g(f(3)) = g(c) = 3$$

y que:

$$f \circ g\,(a) = f(g(a)) = f(2) = a$$
$$f \circ g\,(b) = f(g(b)) = f(1) = b$$
$$f \circ g\,(c) = f(g(c)) = f(3) = c$$

Brevemente puesto, si g es la función inversa de f, entonces será $g \circ f(x) = x$ para todo $x \in \mathbf{A}$ y $f \circ g(x) = x$ para todo $x \in \mathbf{B}$. Esto nos suministra lo que necesitábamos para una definición adecuada:

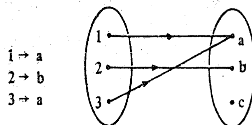
DEFINICION 2.10.

Sea $f: A \to \mathbf{B}$ una función. Se llama *función inversa* de f a la función $g: A \to \mathbf{B}$ que tiene la siguiente propiedad:

$$g \circ f(x) = x \quad \text{para todo } x \in A$$
$$f \circ g(x) = x \quad \text{para todo } x \in B$$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Esta definición plantea automáticamente dos preguntas: si $f: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es una función cualquiera, ¿existirá una función inversa de f?. Y supuesto que exista ¿será única?. Para la primera pregunta, consideremos el siguiente ejemplo: sean $\mathbf{A} = \{1, 2, 3\}$, $\mathbf{B} = \{a, b\}$ y $f: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ la función definida por:



la correspondencia inversa es:

$$a \to 1$$
$$b \to 2$$
$$a \to 3$$

Ahora bien, esta correspondencia *no* es una función de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$ por dos motivos:

i) al elemento $\mathbf{a}$ le corresponden tanto el 1 como el 3 y la definición de función pide que a cada elemento (de $\mathbf{B}$ en este caso) le corresponda un ***único*** elemento (de $\mathbf{A}$)

ii) al elemento de $\mathbf{c}$ no le corresponde ningún elemento de $\mathbf{A}$ y la definición de función pide que a ***cada*** elemento de $\mathbf{B}$, etc.

El primer motivo obedece claramente al hecho de que la función $\mathbf{f}$ considerada ***no es inyectiva*** y el segundo a que $\mathbf{f}$ no es ***suryectiva***. Esto nos hace sospechar que las funciones que tengan inversa serán las que sean inyectivas *y* suryectivas, a las cuales desde ya les damos un nombre:

DEFINICION 2.11.

Una función $f: A \to B$ se dice *biyectiva* si es inyectiva y suryectiva.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Probamos ahora que nuestra sospecha es justificada.

PROPOSICION 2.12.

Sea $f: A \to B$ una función. Existe entonces función inversa de f si y sólo si f es biyectiva.

▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪

Demostración: Supongamos primero que existe función inversa, es decir una función $g: \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ tal que $f \circ g(x) = x$ para todo $x \in \mathbf{B}$ y $g \circ f(x) = x$ para todo $x \in \mathbf{A}$. La inyectividad de $\mathbf{f}$ resulta inmediatamente: si $x_1, x_2 \in \mathbf{A}$ son tales que:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

entonces será:

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

o sea:

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$$

es decir

$$x_1 = x_2$$

Para probar la suryectividad, sea $b \in \mathbf{B}$ cualquiera. Debemos encontrar un $a \in A$ tal que $f(a) = b$; pero si consideramos $a = g(b)$ resulta:

$$f(a) = f(g(b)) = f \circ g(b) = b$$

Supongamos ahora que $\mathbf{f}$ es biyectiva y probemos que en ese caso hay función inversa de $\mathbf{f}$. Para $b \in \mathbf{B}$ sabemos, por la suryectividad de $\mathbf{f}$, que existe $a \in A$ con la propiedad de ser $f(a) = b$ y sabemos, por la inyectividad de $\mathbf{f}$, que ese $\mathbf{a}$ es único. Definimos entonces $g(b) = a$.

De esta manera obtenemos una función $g: \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ que, por su propia construcción, resulta ser la inversa de f.///

Veamos un ejemplo de como encontrar la función inversa. Consideremos la función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por

$$f(x) = 3x + 2$$

Llamemos $\mathbf{y}$ al elemento al cual va a parar $\mathbf{x}$, es decir $y = 3x + 2$.

Como $\mathbf{f}$ lleva $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$, la inversa debe llevar $\mathbf{y}$ en $\mathbf{x}$. Pero de $y = 3x + 2$ deducimos $x = \dfrac{y-2}{3}$; luego la inversa debe llevar $\mathbf{y}$ en $\dfrac{y-2}{3}$. En otras palabras, la función inversa de $\mathbf{f}$ será la función $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por

$$g(y) = \frac{y-2}{3}$$

o, lo que es lo mismo:

$$g(x) = \frac{x-2}{3}$$

Verifiquemos que esta g es inversa de f:

$$g{\circ}f(x) = g(f(x)) = g(3x+2) = \frac{(3x+2)-2}{3} =$$

$$= \frac{3x}{3} = x$$

$$f{\circ}g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x-2}{3}\right) = 3\left(\frac{x-2}{3}\right) + 2 =$$

$$= (x-2) + 2 = x$$

Vemos entonces que, en la práctica, hallar la inversa de f se reduce a despejar x de la ecuación $f(x) = y$ y construir la función que lleva y en lo que resulte ser el segundo miembro de ese despeje.

Consideremos ahora la función $f: R_{\geqslant 0} \to R_{\geqslant 0}$ dada

$$f(x) = x^n \quad (n \in N)$$

La Proposición 1.30. (Parágrafo 9 del Capítulo 1) no dice otra cosa que la biyectividad de esta función; por lo tanto tendrá una función inversa $g: R_{\geqslant 0} \to R_{\geqslant 0}$.

Para obtenerla, de $y = x^n$ despejamos $x = \sqrt[n]{y}$ y por tanto la inversa de f es:

$$g(x) = \sqrt[n]{x}$$

En el caso en que n sea *impar* se puede ir un poco más lejos. Pues podemos extender la definición de raíz n-sima a números negativos: si $x < 0$ definimos la raíz n-sima de x como $-\sqrt[n]{(-x)}$ (así, $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{-(-8)} = -2$) y es inmediato verificar que elevar ese número a la n da por resultado x.

De esta manera, para n *impar*, la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^n$ resulta biyectiva con inversa $g: R \to R$ dada por $g(x) = \sqrt[n]{x}$

EJERCICIOS

1

Sea $f: A \to B$ biyectiva. Probar que la inversa de f es única (si g_1 y g_2 son inversas de f, probar que $g_1(x) = g_2(x)$ para todo $x \in B$) (A partir de ahora indicaremos a la inversa de f, si existe, como f^{-1})

2

Sean $g: R \to R$ dada por $g(x) = x^2 + 1$ y $f: R_{\neq 0} \to R$ dado por $f(x) = \frac{1}{x}$

Hallar:

a) $g(f(2))$; b) $f(g(2))$; c) $g(g(2))$; d) $g(1 + f(2))$;
e) $1 + g(f(2))$; f) $f(g(f(2)))$

3

Dadas las funciones $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{2}$ *y* $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ *hallar* $f{\circ}g$ *especificando cuáles son los dominios en cada caso.*

4

Hallar f sabiendo que es lineal y que:

$$g{\circ}f(x) = x^2 - 3x + 5$$

$$g(x) = x^2 + x + 3$$

5

Probar que la inversa de una función biyectiva es biyectiva.

6

Probar que si $f: R \to R$ *es biyectiva e impar, entonces* f^{-1} *es impar.*

7

Probar que si $f{\circ}g$ es inyectiva, entonces g es inyectiva.

8

Probar que si $f{\circ}g$ es suryectiva, entonces f es suryectiva.

9

Probar que las siguientes funciones son biyectivas y hallar sus inversas:

a) $f: R \to R$, $f(x) = 6x - 3$

b) $f: R \to R$, $f(x) = x^3 + 2$

c) $f: R_{\neq 2} \to R_{\neq 1}$, $f(x) = \frac{x}{x-2}$

d) $f: R_{\neq 1} \to R_{\neq 3}$, $f(x) = \frac{3x^3}{x^3 - 1}$

e) $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

f) $f: R \to R$, $f(x) = 3x - 2\,|x|$

g) $f: R \to R_{\neq 1,-1}$, $f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$

10

Si $f: R \to R$ es una función biyectiva, mostrar con un argumento geométrico que su representación gráfica y la de f^{-1} son simétricas respecto a la recta $y = x$ (SUGERENCIA: ver que los puntos (a, b) y (b, a) son simétricos respecto a dicha recta). Aprovechar este hecho para hacer la representación gráfica de $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$

APENDICE

Vamos a mostrar ahora como, en definitiva, tod
los conceptos que hemos utilizado en los dos capít
los previos pueden reducirse a nociones sobre conju
tos. Toda la Matemática conocida se puede fundame
tar en la teoría de conjuntos en el siguiente sentido:
parte solamente de la noción de conjuntos y de un
pocas propiedades elementales de ellos (por ejempl
la unión de conjuntos es un conjunto, la intersecci
también, etc.) y, usando sólo principios lógicos, se c
finen todos los conceptos matemáticos a partir de l
conjuntos y se demuestran sus propiedades a partir
las propiedades aceptadas para los conjuntos.

♦ 1

Como primer ejemplo, veamos más de ce
ca la noción de *función*. Aparentemente su definici
(Definición 2.1.) es puramente conjuntista: es una c
rrespondencia entre *conjuntos* tal que, etc. Pero la n
ción de "correspondencia" o "asignación" no es co
juntista.

Eso no es un defecto, desde luego, ni significa q
no se entienda bien lo que quiere decir; pero, para d
le una fundamentación más sólida a la noción de fu
ción, queremos reemplazar la noción de "corresp
dencia" por una noción conjuntista.

La solución estriba en darse cuenta de que una fu
ción, en el sentido de la Definición 2.1., queda co
pletamente conocida si se tiene lo que hemos llama
su *gráfico*. Recordemos que lo habíamos definido
ra funciones de R en R en el parágrafo 2.1, pero
se generaliza rapidamente de la siguiente manera:

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, su *p*
ducto cartesiano A x B se define como el conjunto
todos los pares ordenados posibles (a, b) donde a es
elemento de A y b es un elemento de B, es decir:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Si $f: A \to B$ es una función, su *gráfico* es:

$$\text{Graf}(f) = \{(a, b) : a \in A \text{ y } b = f(a)\}$$

De esta manera, Graf(f) resulta ser un subconjunto de $A \times B$, pero no un subconjunto cualquiera. Pues el hecho de que a *cada* $a \in A$ le corresponda un *único* $b \in B$ se puede traducir en las siguientes dos propiedades de Graf(f):

- i) Si $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in \text{Graf}(f)$;
- ii) Si (a, b) y (a', b) pertenecen a Graf(f), entonces $a = a'$.

La primera propiedad corresponde a la afirmación "a *cada* $a \in A$. . ." y la segunda a ". . . un *único* $b \in B$. . .". Esto lleva a dar la siguiente definición conjuntista de función:

DEFINICION A.1.

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, una *función* de A en B es un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$ que tenga las siguientes propiedades:

i) Para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$.

ii) Si (a, b) y (a, b') pertenece a R, entonces $a = a'$.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Desde luego, nadie, salvo quizás los especialistas en teoría de conjuntos, piensa en una función en términos de la Definición A.1 sino más bien en términos de la Definición 2.1, y la misma actitud se le aconseja al lector.

Pero también debe recordar que *hay* una manera de definir funciones utilizando solamente la noción de conjunto.

♦ 2

La cosa se puede llevar más lejos todavía; hemos utilizado la noción de "par ordenado" en el punto anterior. Pero ¿qué quiere decir el par ordenado (a, b) en términos de conjuntos?

No puede significar el conjunto $\{a, b\}$ formado por los elementos a y b, pues entonces sería lo mismo (a, b) que (b, a) y desaparecería la idea de par *ordenado*. La solución es muy sencilla: se *define* el par ordenado (a, b) de la siguiente manera:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \qquad (1)$$

o sea (a, b) es el conjunto cuyos elementos son: i) el conjunto cuyo único elemento es a; ii) el conjunto cuyos únicos elementos son a y b. Con esta definición, (a, b) ya no es lo mismo que (b, a) (salvo que sea $a = b$) como se puede verificar fácilmente.

Nuevamente, nadie piensa en un par ordenado en el sentido (1) ni tampoco el lector debe hacerlo; pero sí debe recordar que *hay* una definición puramente conjuntista de la noción de "par ordenado"

♦ 3

Al comenzar el Capítulo 1, habíamos admitido ciertas propiedades de la suma, el producto y el orden de números reales. ¿Cómo se describen estos conceptos en términos conjuntistas?

De la suma lo único que nos interesa, además de sus propiedades, es que a cada par de números reales a y b le hace corresponder un número real a+b. En otras palabras, la suma es una función

$$+ : R \times R \to R$$

y lo mismo podemos decir respecto al producto. Como la noción de función se puede poner en términos conjuntistas, según vimos recién, lo mismo vale para la suma y el producto.

Respecto al orden, el hecho de ser $a < b$, queda completamente conocido si damos todos los pares (a,b) con $a < b$. Luego el orden se puede definir como un subconjunto H de $R \times R$ y las propiedades O_1, O_2, O_3 y O_4 se reescriben de la siguiente manera:

O'_1) Si $a,b \in R$, entonces ó $a = b$ ó $(a,b) \in H$ ó $(b,a) \in H$

O'_2) Si $(a,b) \in H$ y $(b,c) \in H$ entonces $(a,c) \in H$

O'_3) Si $(a,b) \in H$ entonces $(a+c, b+c) \in H$ cualesquiera sea $c \in R$

O'_4) Si $(a,b) \in H$ y $c \in R$ es positivo, entonces $(ac, bc) \in H$

♦ 4

Otro concepto al cual se le puede dar precisión usando nociones conjuntistas es el de *infinito*. Eso se hace de la siguiente manera: si n es un número natural, definimos

$$I_n = \{m \in N : m \leqslant n\}$$

(o sea, $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$). Entonces se dice que un conjunto de A es *finito* si existen un número natural n y una función biyectiva $f: I_n \to A$. En ese caso se dice que A tiene n elementos. Un conjunto se dice *infinito* si no es finito ni vacío.

Con estas definiciones se puede *demostrar* un hecho evidente que vamos a usar más adelante; si A es un conjunto finito de números reales, entonces existe *mínimo* de A; es decir hay un elemento de A que es menor que todos los demás. La demostración es por inducción sobre el número de elementos de A. Si A tiene un elemento, la afirmación es trivial.

Supongamos entonces que todo subconjunto de R de n elementos tiene un mínimo y sea A un subconjunto de R de $(n+1)$ elementos. Esto quiere decir que existe una biyección

$$f: I_{n+1} \to A$$

Consideremos el elemento $f(n+1) \in A$. Si éste elemento es menor que los demás elementos de A, entonces ya encontramos el mínimo de A y no hay más que hablar. Si no es así, consideremos la función

$$g: I_n \to A \sim f(n+1)$$

(este último conjunto consiste en sacarle $f(n+1)$ a A) definida por

$$g(m) = f(m) \text{ para todo } m \leqslant n$$

(esto es lo que se suele llamar *restricción* de f a I_n). Es muy fácil ver que g es una biyección; por lo tanto $A \sim f(n+1)$ tiene n elementos y, por hipótesis inductiva, tiene un mínimo elemento x.

Ese x debe ser también menor que $f(n+1)$ (sino, $f(n+1)$ ya sería el mínimo de A, y estaríamos en el caso anterior) y por lo tanto es menor que *todos* los demás elementos de A.

Otra cosa que podemos probar es una afirmación que hemos hecho al final del parágrafo 1.7, a saber, que entre dos racionales a y b con $a < b$ hay *infinitos* números racionales.

Supongamos que no es así, es decir supongamos que el conjunto

$$A = \{r \in Q : a < r < b\}$$

no es infinito. Como no es vacío (por ejemplo $\frac{a+b}{2} \in A$), entonces debe ser finito. Por lo que vimos recién, debe haber un mínimo de A, digamos r_0.

Pero entonces es $a < \frac{a+r_0}{2} < r_0$ y $\frac{a+r_0}{2} \in Q$,

con lo cual r_0 no sería el mínimo de A. Este absurdo proviene de suponer A no infinito, luego efectivamente hay infinitos racionales entre dos de ellos.

♦ 5

Vamos a aclarar, por último, una cuestión relacionada con las *definiciones por inducción* (Parágrafos 1.4, y 1.5).

Veamos, por ejemplo, como se define, en forma completamente rigurosa, la potencia de exponente natural. Esta discusión resultará más complicada que las anteriores, así que la haremos con todo detalle.

Sea a un número real fijo. Tener definido a^n para todo natural n es lo mismo que tener la función $f:N \to R$ dada por $f(n) = a^n$. Habíamos definido a^n de la siguiente manera: $a^1 = a$, y, supuesto definido a^n, definíamos $a^{n+1} = a.a^n$.

En términos de funciones, esto significa $f(1) = a$, y $f(n+1) = a.f(n)$. A nuestra afirmación, que a^n quedaba así definida para todo $n \in N$, se le puede dar ahora una forma precisa y demostrarla:

PROPOSICION A.2

Sea a un número real. *Existe* entonces una *única* función

$$f:N \to R$$

con las propiedades:

$$(1) \quad \begin{cases} f(1) = a \\ f(n+1) = a.f(n) \text{ para todo } n \in N \end{cases}$$

Demostración: Como la Proposición afirma dos cosas (que existe tal función y que es única), debemos dividir la demostración en dos partes:

★ i) Existencia de f.

En primer término observemos lo siguiente: si $n \in N$, si $I_n = \{k \in N : k \leqslant n\}$ y $g: I_n \to R$, $h: I_n \to R$ tienen las propiedades:

$$(2) \quad \begin{cases} g(1) = a \\ g(k+1) = a.g(k) \text{ para } k \in N, k+1 \leqslant n \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(1) = a \\ h(k+1) = a.h(k) \text{ para } k \in N, k+1 \leqslant n \end{cases}$$

entonces necesariamente debe ser $g = h$, es decir $g(k) = h(k)$ para todo $k \in I_n$. En efecto, si no fuese así, habría por Teorema 1.10 un mínimo número natural $q \in I_n$ para el cual sería $g(q) \neq h(q)$.

Entonces $g(q-1) = h(q-1)$ (Notar que debe ser $q \neq 1$ por ser $g(1) = a$ y $h(1) = a$, luego $q-1 \in N$). Pero entonces resulta, por las propiedades supuestas de g y h:

$$g(q) = a.g(q-1) = a.h(q-1) = h(q)$$

o sea $g(q) = h(q)$, contra lo supuesto. Este absurdo proviene de negar la igualdad de g y h, luego $g = h$.

Observemos que hasta ahora hemos probado lo siguiente: para todo número natural n ***existe a lo sumo una*** función $g: I_n \to R$ que satisface (2), pero cabe la posibilidad. supongamos que para algún número natural n *no* exista ninguna $g: I_n \to R$ con las propiedades (2).

Existe entonces, por Teorema 1.10, un número natural q para el cual no existe $g: I_q \to R$ con las propiedades (2). Pero entonces *sí* existe una función $h: I_{q-1} \to R$ con esas propiedades. Definimos entonces $g: I_q \to R$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} g(k) = h(k) \text{ si } k \leqslant q-1 \\ g(q) = a.h(q-1) \end{cases}$$

Esta g satisface (2); en efecto, $g(1) = h(1) = a$ por un lado; por el otro, si $k+1 < q$ será $g(k+1) = h(k+1) = a.h(k) = a.g(k)$, y $g(q) = a.h(q-1) = a.g(q-1)$, así que g satisface también la segunda propiedad de (2). Hemos llegado a una contradicción (existe y no existe la tal g) por haber supuesto que no existía. Luego *debe* existir.

Destaquemos bien lo que hemos probado hasta ahora:

"Para todo $n \in N$ existe una única $g: I_n \to R$ tal que

$$(2) \quad \begin{cases} g(1) = a \\ g(k+1) = a.g(k) \text{ si } k \in N \text{ y } k+1 \leqslant n \end{cases}"$$

Supongamos ahora que $g: I_n \to R$ y $h: I_m \to R$ son dos de esas funciones con $n \neq m$, digamos $n < m$. Afirmamos entonces que g y h coinciden en I_n. En efecto, la restricción de h a I_n es una función de $I_n \to R$ que cumple evidentemente (2) (porque lo cumple en I_m, con mayor razón lo hará en I_n). Como vimos que la función en I_n es *única*, entonces $g = h$ *en* I_n.

Ya estamos listos para definir la prometida $f:N \to R$. Hay que decir cuanto vale en cada $n \in N$. Pero para $n \in N$ existe única $g: I_n \to R$ que cumple (2); definimos entonces $f(n) = g(n)$.

Para terminar con la parte de la existencia, sólo queda por probar que la f así construida efectivamente satisface (1).

Que satisface $f(1) = a$ es evidente porque la única $g: I_1 \to R$ que satisface (2) es $g_1 = a$ (notar que $I_1 = \{1\}$). Sea $n \in N$ y sean $g: I_n \to R$, $g': I_{n+1} \to R$ las funciones que satisfacen (2); sabemos que g y g' *coinciden en* I_n. Luego

$$f(n+1) = g'(n+1) = a.g'(n) = a.g(n) = a.f(n)$$

lo que demuestra lo afirmado.

★ ii) Unicidad de f

Supongamos que $f:N \to R$ y $f':N \to R$ son funciones que satisfacen (1).

Consideremos la afirmación $P(n) =$ "$f(n)$ es igual a $f'(n)$". Entonces $P(1)$ es trivialmente verdadera y, si $P(n)$ es cierta, entonces por (1):

$$f(n+1) = a.f(n) = a.f'(n) = f'(n+1)$$

lo cual prueba la verdad de $P(n+1)$. Luego $P(n)$ es verdadera para todo $n \in N$, o sea $f = f'$. ///

Una vez probada esta Proposición, se define naturalmente a^n como $f(n)$. Si se quiere ahora definir, por ejemplo, $\sum_{k=1}^{n} a_k$, habría que probar una proposición análoga a la Proposición A.2, reemplazando (1) por

$$(3) \quad \begin{cases} f(1) = a_1 \\ f(k+1) = f(k) + a_{k+1} \end{cases}$$

La demostración de la Proposición correspondiente no sería más que un calco de A.2. Lo mismo ocurriría con cualquier otro concepto que se defina por inducción.

Antes de dejar descansar al lector, queremos hacerle notar que, en la Proposición A.2, hemos utilizado la noción de función como correspondencia. Si quiere utilizar la definición A.1, entonces tiene que reformular la Proposición e ir traduciendo su demostración paso por paso al lenguaje conjuntista. No lo haga.

CAPITULO III

Límite de Sucesiones

1. Definición de límite. de una sucesión.
2. Algunas propiedades del límite.
3. Límites infinitos
4. Algunos límites importantes
5. Un criterio de convergencia.
6. El número e.
7. La función logaritmo.
8. Otras propiedades del límite.
9. Teoremas de encaje de intervalos y de Bolzano-Weierstrass.
10. Sucesiones de Cauchy.

3.1.

DEFINICION DE LIMITE DE UNA SUCESION

Aunque en el Capítulo 1 hemos ya hablado algo sobre sucesiones, volvemos aquí a recordar el concepto. Habíamos dicho que una *sucesión* (de números reales) consistía en asignarle, a cada número natural n, un número real que indicamos a_n. De esta manera, al número 1 se le asigna un número real a_1, al número 2 un número real a_2, etc. De esta manera, una sucesión queda en la forma:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Por ejemplo, si a cada número natural n se le asigna su cuadrado, n^2, tenemos la sucesión dada por $a^n = n^2$, o sea:

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots$$

y si a cada número natural n se le asigna su inverso multiplicativo, $\frac{1}{n}$, tenemos la sucesión dada por $a_n = \frac{1}{n}$, o sea:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Con la terminología del capítulo 2, es fácil dar una definición precisa del concepto de "sucesión":

DEFINICION 3.1.

Una *sucesión* (de números reales) es una función $a: N \to R$.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Para concordar con la notación anterior, quedaremos de acuerdo en escribir, para cada sucesión $a: N \to R$:

$$a_n \doteq a(n)$$

Hay que distinguir entre la sucesión misma y el conjunto de valores que ella toma.
Este último conjunto puede incluso ser finito; por ejemplo, consideremos la sucesión:

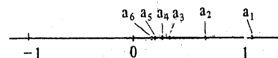
$$-1, 1, -1, 1, \ldots, -1, 1, \ldots$$

o sea, $a_n = a(n) = (-1)^n$. En este caso, el conjunto de valores que toma la sucesión se reduce a un conjunto de dos elementos: el 1 y el -1. Por eso no se suele indicar una sucesión como $\{a_n : n \in N\}$ (en este caso sería $\{a_n : n \in N\} = \{1, -1\}$) sino en la forma $(a_n)_{n \in N}$ o también $(a_n)_{n \geqslant 1}$.

Si se representan los diversos valores a_n, para una sucesión dada, sobre una recta, se puede tener una idea del comportamiento que ésta tiene. Consideremos por ejemplo la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$, es decir:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Representando los primeros términos en una recta obtenemos lo siguiente:



Geométricamente parece claro que a medida que vamos tomando valores sucesivos de a_n, nos vamos acercando al 0. En efecto, a_2 está más cerca de 0 que a_1, a_3 está más cerca de 0 que a_2, etc. Pero esta última afirmación no lo dice todo sobre ese acercamiento. Porque también es cierto, por ejemplo, que a_2 está más cerca de -1, que a_1, que a_3 está más cerca de -1 que a_2, etc. y evidentemente el acercamiento a 0 de esta sucesión tiene una característica que no tiene, por ejemplo, su acercamiento a -1.

¿Cuál es esa característica? Pues la de que esta sucesión *llega a estar tan cerca de* 0 *como se quiera.* En cambio no vale eso si cambiamos 0 por -1, esta sucesión *no* llega a estar tan cerca de -1 como se quiera, su distancia a -1 es, como se puede ver en la figura, siempre mayor que 1. ¿Cómo podemos poner en términos precisos la afirmación: "una sucesión $(a_n)_{n \geqslant 1}$, llega a estar tan cerca del número ℓ como se quiera"? La distancia entre a_n y ℓ está medida por $|a_n - \ell|$ (Parágrafo 1.12), por lo tanto lo que queremos decir es que $|a_n - \ell|$ llega a ser tan chico como se quiera.

En otras palabras: si nos dan un número positivo cualquiera, digamos ϵ, no importa cuán chico sea, podemos conseguir que $|a_n - \ell|$ sea menor que ϵ con tal de avanzar lo suficiente en la sucesión, es decir, con tal de tomar n grande. Y más aún: si tomamos n más grande todavía, entonces también seguirá siendo $|a_n - \ell|$ menor que ϵ (pues ese módulo debe ser más pequeño a medida que n aumenta). Toda esta charla se puede poner ahora en términos precisos:

DEFINICION 3.2.

Se dice que una sucesión $(a_n)_{n \geqslant 1}$ *tiene límite* ℓ, o *converge* a ℓ, o *se acerca* a ℓ (en símbolos, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \ell$)
si tiene la siguiente propiedad:
"Cualquiera sea el número real $\epsilon > 0$, hay un número natural n_0 tal que, para $n \geqslant n_0$, es $|a_n - \ell| < \epsilon$". (1)

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Ya que, inspirados en un ejemplo, dimos la definición general de límite de una sucesión, sería bueno ver que ese ejemplo se ajusta a la definición.

Consideremos entonces nuevamente el ejemplo $a_n = \frac{1}{n}$; afirmamos que, en el sentido de la Definición 3.2., es:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Hay que probar entonces que esta sucesión tiene efectivamente la propiedad (1).

Sea pues ϵ un número real positivo cualquiera. Tenemos que encontrar un natural n_0 con la propiedad de que, si $n \geqslant n_0$, sea $|\frac{1}{n} - 0| \leqslant \epsilon$, o sea $|\frac{1}{n}| < \epsilon$.

Como $\frac{1}{n}$ es positivo, esta última desigualdad equivale a $\frac{1}{n} < \epsilon$.

Aquí hacemos lo que será el punto clave en los ejemplos: *despejar* n de esa desigualdad. Por supuesto, eso es muy fácil: resulta $n > \frac{1}{\epsilon}$. Cuando se llega a despejar n, uno puede asegurarse de que el resto seguirá bien. Tomamos como n_0 un número natural cualquiera que cumpla $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ (existe por Arquimedianidad). Entonces, si $n \geqslant n_0$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \frac{1}{1/\epsilon} = \epsilon$$

Esto demuestra que la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ satisface (1) cuando $\ell = 0$ y, por lo tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Veamos varios ejemplos más que aclaren la Definición 3.2. y su uso.

EJEMPLO 1

Consideremos la sucesión dada por $a_n = \frac{1}{n^2}$. Afirmamos que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Sea ϵ un número real positivo cualquiera. Tenemos que encontrar un natural n_0 con la propiedad de que, si $n \geqslant n_0$, sea $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \epsilon$. Como $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ la desigualdad $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \epsilon$ es equivalente a la desigualdad $\frac{1}{n^2} < \epsilon$

Nuevamente *despejamos* n de esta desigualdad: pasando de miembro resulta ser $\frac{1}{\epsilon} < n^2$, es decir $n^2 > \frac{1}{\epsilon}$, o sea $n > \sqrt{\frac{1}{\epsilon}}$. Al llegar a este punto, como lo haremos siempre, elegimos un número natural $n_0 > \sqrt{\frac{1}{\epsilon}}$ (con lo cual será $\frac{1}{n_0^2} < \epsilon$). Entonces, si $n \geqslant n_0$:

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n_0^2} < \epsilon$$

lo que prueba lo afirmado.

EJEMPLO 2

Consideremos la sucesión dada por $a_n = \frac{1}{n^2+n}$. Afirmamos que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2+n} = 0$$

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Queremos encontrar un $n_0 \in N$ l que, si $n \geq n_0$, $\left|\frac{1}{n^2+n} - 0\right| < \epsilon$. Esta desigualdad s equivalente a $\frac{1}{n^2+n} < \epsilon$, pero ahora despejar n de desigualdad se ha vuelto un poco más complicado.

En vista de ello, apelamos a la siguiente, y evidene, acotación:

$$\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n}$$

y entonces, en lugar de despejar n de $\frac{1}{n^2+n} < \epsilon$, lo *despejamos* de $\frac{1}{n} < \epsilon$, con lo que resulta ser $n > \frac{1}{\epsilon}$. Elegimos ahora un número natural $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ (con lo cual $\frac{1}{n_0} < \epsilon$) y todo va a andar bien. En efecto, si $n \geq n_0$:

$$\left|\frac{1}{n^2+n} - 0\right| = \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

lo que prueba lo afirmado.

EJEMPLO 3

Consideremos la sucesión dada por $a_n = \frac{1}{2n^2 - 3n}$

Afirmamos que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n^2 - 3n} = 0$$

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario y busquemos $n_0 \in N$ tal que, si $n \geq n_0$, $\left|\frac{1}{2n^2-3n} - 0\right| < \epsilon$.

Desde luego, $\left|\frac{1}{2n^2 - 3n} - 0\right| = \left|\frac{1}{2n^2 - 3n}\right|$, pero para sacar las barras de módulo de aquí, hay que tener un poco de cuidado. Para que sea positivo el término en cuestión, debe ser $2n^2 - 3n > 0$, o sea $2n^2 > 3n$ de donde, simplificando n, $2n > 3$ o sea $n > \frac{3}{2}$. Entonces todos los razonamientos que ahora vengan serán válidos si $n > \frac{3}{2}$; como n es natural, eso es lo mismo que pedir $n > 1$. Por lo tanto, sea cual sea el n_0 que elijamos al final del proceso, *va a tener que ser mayor que* 1.

Sigamos. Con esa precaución, resulta ser $\left|\frac{1}{2n^2-3n}\right| = \frac{1}{2n^2 - 3n}$, y nuevamente despejar n de $\frac{1}{2n^2 - 3n} <$ ϵ resulta complicado. Nos gustaría entonces hacer una acotación como la del Ejemplo 2, pero ya no es tan fácil. Porque no es cierto que $\frac{1}{2n^2 - 3n} < \frac{1}{2n^2}$ (es mayor en realidad) ni que $\frac{1}{2n^2 - 3n} < \frac{1}{-3n}$. El objetivo, desde luego, es dejar en el denominador una sola potencia de n; para ello pensamos lo siguiente: si fuese $2n^2 > 4n$, entonces sería $2n^2 - 3n > 4n - 3n = n$, y por lo tanto $\frac{1}{2n^2 - 3n} < \frac{1}{n}$. Pero que valga $2n^2 > 4n$ es equivalente a $2n > 4$, o sea a $n > 2$.

Entonces, sea cual sea el n_0 que elijamos al final, va *a tener que ser mayor que* 2.

Con esta precaución (que incluye a la anterior), resulta ser:

$$\frac{1}{2n^2 - 3n} < \frac{1}{n}$$

y *despejando* n de $\frac{1}{n} < \epsilon$ resulta $n > \frac{1}{\epsilon}$. Guiados por los ejemplos anteriores, elegiríamos $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$, pero si recordamos que debe ser también mayor que 2, elegimos $n_0 \in N$ tal que

$$n_0 > \max\left(2, \frac{1}{\epsilon}\right)$$

(el segundo miembro indica el mayor entre los números 2 y $\frac{1}{\epsilon}$). Eligiendo n_0 de esa manera, resulta $n_0 > 2$ y además $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Ahora todo va a ir bien; si $n \geq n_0$, será:

$$\left|\frac{1}{2n^2 - 3n} - 0\right| = \left|\frac{1}{2n^2 - 3n}\right| =$$

(ya que $n \geq n_0 > 1$)

$$= \frac{1}{2n^2 - 3n} <$$

(ya que $n \geq n_0 > 2$)

$$< \frac{1}{4n - 3n} =$$

$$= \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{1}{1/\epsilon} =$$

$$= \epsilon$$

y nuestra afirmación queda demostrada.

EJEMPLO 4

Consideremos la sucesión dada por $a_n = \frac{1}{n^3 - 3n^2 + 2n - 4}$.

Afirmamos que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3 - 3n^2 + 2n - 4} = 0$$

Este ejemplo es muy similar en su tratamiento al anterior, así que lo hacemos más brevemente. Observemos que para $n > 4$ es, multiplicando por n^2, $n^3 > 4n^2$ y por lo tanto $n^3 - 3n^2 + 2n - 4 > 4n^2 - 3n^2 + 2n - 4 = n^2 + 2n - 4$.

Por otra parte, $n^2 + 2n - 4 > 2n - 4$ y *despejar* n de $\frac{1}{2n-4} < \epsilon$ es fácil (resulta $n > \frac{1/\epsilon + 4}{2} = \frac{1}{2\epsilon} + 2$).

Entonces eligiendo $n_0 \in N$ tal que:

$$n_0 > \max\left(4, \frac{1}{2\epsilon} + 2\right)$$

debe resultar la desigualdad buscada. En efecto, si $n \geq n_0$:

$$\left|\frac{1}{n^3 - 3n^2 + 2n - 4} - 0\right| = \left|\frac{1}{n^3 - 3n^2 + 2n - 4}\right| =$$

(ya que al ser $n > 4$, el denominador es > 0)

$$= \frac{1}{n^3 - 3n^2 + 2n - 4} < \frac{1}{4n^2 - 3n^2 + 2n - 4} =$$

$$= \frac{1}{n^2 + 2n - 4} < \frac{1}{2n - 4} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2n_0 - 4} < \frac{1}{2\left(\frac{1}{2\epsilon} + 2\right) - 4} =$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{2\epsilon} + 4 - 4} = \frac{1}{1/\epsilon} =$$

$$= \epsilon$$

lo cual prueba nuestra afirmación.

EJEMPLO 5

A esta altura, el lector debe estar sospechando que todos los límites valen $\mathbf{0}$. Consideremos entonces la sucesión dada por $a_n = \dfrac{n^2+2n+1}{n^2-3n-2}$. Afirmamos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2-3n-2} = 1$$

Sea $\epsilon > 0$ un número arbitrario. Es:

$$\left|\frac{n^2+2n+1}{n^2-3n-2} - 1\right| = \left|\frac{n^2+2n+1-(n^2-3n-2)}{n^2-3n-2}\right| = \left|\frac{5n+3}{n^2-3n-2}\right|$$

Queremos conseguir que esto sea menor que ϵ tomando n grande. La idea que nos va a guiar es dejar solamente potencias cuadradas de n en el denominador y n sin elevar (o elevado a la 1) en el numerador, de manera que lo que obtengamos sea del tipo $\dfrac{An}{Bn^2} = \dfrac{A}{Bn}$ (despejar n de $\dfrac{A}{Bn} < \epsilon$ es fácil).

Primero trataremos de quitar las barras de módulo. Para eso observamos que en el denominador aparece n^2 con signo "más" y $3n$ y 2 con signo "menos"; para n grande, n^2 tendrá mucho más peso que $3n$ y que 2 y por lo tanto el denominador será positivo. No hace falta tomar n muy grande: si $n > 4$, $n^2 - 3n - 2 > 4n - 3n - 2 = n - 2 > 4 - 2 = 2 > 0$, luego, *si al elegir n_0 tomamos la precaución de que sea mayor que* 4, podemos olvidarnos de las barras de módulo.

Queremos dejar potencias cuadradas de n en el denominador; para ello observamos que, para n grande, es $n^2 - 3n - 2 > n^2 - \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{3}n^2$, en efecto es $-3n > -\frac{1}{3}n^2$ si y sólo si $3n < \frac{1}{3}n^2$, o sea si y solo si $9 < n$. Y es $-2 > -\frac{1}{3}n^2$ si y solo si $2 < \frac{1}{3}n^2$, o sea si y sólo si $6 < n^2$, lo cual se consigue seguro si $n > 3$.

En definitiva, para $n > 9$ podemos decir que $n^2 - 3n - 2 > n^2 - \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{3}n^2$. Pero entonces, *al elegir n_0, debemos tener la precaución de que sea mayor que* 9. En ese caso quedaría:

$$\left|\frac{5n+3}{n^2-3n-2}\right| = \frac{5n+3}{n^2-3n-2} < \frac{5n+3}{n^2-\frac{1}{3}n^2-\frac{1}{3}n^2} =$$

$$= \frac{5n+3}{\frac{1}{3}n^2} = \frac{15n+9}{n^2} <$$

$$< \frac{15n+9n}{n^2} = \frac{24n}{n^2} =$$

$$= \frac{24}{n}$$

y *despejar* n de $\frac{24}{n} < \epsilon$ es fácil: será $n > \frac{24}{\epsilon}$. Llegado a este punto, como siempre elegimos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n_0 > \max\left(9, \frac{24}{\epsilon}\right)$$

(con lo cual será $n_0 > 9$ y $n_0 > \frac{24}{\epsilon}$). Si $n \geq n_0$, entonces:

$$\left|\frac{n^2+2n-1}{n^2-3n-2} - 1\right| = \left|\frac{5n+3}{n^2-3n-2}\right| =$$

(ya que $n \geq n_0 > 9 > 4$)

$$= \frac{5n+3}{n^2-3n-2} <$$

(ya que $n \geq n_0 > 9$)

$$< \frac{5n+3}{n^2-\frac{1}{3}n^2-\frac{1}{3}n^2} = \frac{5n+3}{\frac{1}{3}n^2} =$$

$$= \frac{15n+9}{n^2} < \frac{15n+9n}{n^2} = \frac{24}{n} \leq$$

$$\leq \frac{24}{n_0} < \frac{24}{24/\epsilon} = \epsilon$$

que era lo que habíamos afirmado.

OBSERVACIONES

★ **1.** En todos estos ejemplos, el lector habrá notado que, con la definición de límite, sólo podemos comprobar, hasta ahora, que determinado número es efectivamente el límite de cierta sucesión, pero que no tenemos manera de averiguar *cuál* es ese límite. Para ello debemos ver, lo haremos en el próximo parágrafo, algunas propiedades de la noción de límite, propiedades que nos facilitarán posteriormente el cálculo efectivo de dichos límites.

★ **2.** En los cinco ejemplos que hemos dado, hay una mecánica de procedimientos que es oportuno resaltar aquí. En primer término, el procedimiento de *acotación*, tan importante en el Análisis Matemático que hay quienes dicen que "hacer Análisis es acotar"; acotar bien desde luego.

El caso típico de acotación es el que hemos visto: queremos mostrar que una cierta expresión se puede hacer menor que ϵ; para ello mostramos que esa expresión es, a su vez, menor que otra, y que esta otra se puede hacer menor que ϵ (con mayor razón entonces la expresión original).

Acotar bien, es aquí, conseguir esta otra expresión de manera que sea más fácil de ver que se puede hacer menor que ϵ (en el ejemplo 2, es más fácil ver que $\frac{1}{n}$ se puede hacer menor que ϵ que verlo directamente para $\frac{1}{n^2+n}$; en el ejemplo 5, es más fácil ver que $24/n$ se puede hacer menor que ϵ que verlo directamente para $\left|\frac{n^2+2n+1}{n^2-3n-2} - 1\right|$, etc.).

La pericia en la acotación se consigue peleándose con los ejercicios (ahora vienen algunos), tratando de imitar en ellos los procedimientos vistos recién en los ejemplos.

★ **3.** Se habrá observado en los ejemplos que, una vez elegido el n_0, la cosa se vuelve más o menos automática, ya que hay que repetir acotaciones hechas anteriormente.

Eso hace que mucha gente, en la práctica, considere terminado el ejercicio con la elección de n_0. Desde un punto de vista lógico no es así, *a partir* de la elección del n_0 *se demuestra*, en realidad, que el límite es el número indicado.

Pero no se puede negar que la verdadera dificultad, en cada ejemplo, estriba en *llegar* a la adecuada elección del n_0, por lo cual la mencionada actitud no deja de tener su fundamento (lo que viene después, insistimos, es más o menos automático).

EJERCICIOS

1

Probar que la sucesión "constante", $a_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tiene límite a.

2

Probar que si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, entonces $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ (usar ejercicio 4. c del parágrafo 1.12)

3

Probar las siguientes afirmaciones:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2-4n} = 0$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2-n^2} = 0$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n+2} = \frac{3}{4}$

g) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n^2-2n-3} = 0$

h) $\lim_{n\to\infty} \frac{-3n+1}{4n^2-3n+4} = 0$

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n-2}{n^2+1} = 3$

j) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+1}{3n^2+2n-1} = \frac{2}{3}$

k) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{3n^2-14n-7} = \frac{1}{3}$

l) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^{3/2}+1} = 0$

m) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/3}+1}{n^{3/4}+4} = 0$

n) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^{2/3}+n^{4/5}+2n^{5/2}}{n^3+n^{2/3}+5n} = 0$

o) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^{3/4}+n^{1/2}}{n^{3/4}} = 2$

p) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n^{7/2}}{n^{7/2}-6n^3+3n^2-2n-1} = -3$

4

Probar que

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$$

(SUGERENCIA: *multiplicar y dividir por el "conjugado* $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$).

5

En el ejercicio 1, partes a), c) y f), elegir un n_0 correspondiente a

$$\epsilon = \frac{1}{10}, \quad \epsilon = \frac{1}{100}; \quad \epsilon = \frac{2}{1037}$$

6

a) Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión convergente con límite ℓ. Probar que si $(b_n)_{n\geq 1}$ está definida por

$b_n = a_{n+1}$ (o sea, "$b_1, b_2, \ldots$" es "$a_2, a_3, \ldots$")

entonces

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$$

b) Más generalmente, si $p \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\geq 1}$ es convergente con límite ℓ y $(b_n)_{n\geq 1}$ está definida por

$$b_n = a_{n+p}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$$

c) Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es convergente con límite ℓ y definimos $(b_n)_{n\geq 1}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} b_1 = \text{cualquier cosa} \\ b_2 = \text{cualquier cosa} \\ \vdots \\ b_p = \text{cualquier cosa} \\ b_k = a_k \text{ para } k > p \end{cases}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$$

(o sea, cambiar de cualquier forma los primeros p términos de una sucesión convergente, no cambia su convergencia ni el valor de su límite) (Sugerencia: al elegir el n_0, tener la precaución de que sea mayor que p).

7

Probar que la sucesión dada por $a_n = (-1)^n$ no es convergente (Sugerencia: probar primero que no converge a ningún número c distinto de 1 o de −1 y después probar que no converge ni a 1 ni a −1).

3.2. ALGUNAS PROPIEDADES DEL LIMITE

Vamos a estudiar ahora algunas propiedades relacionadas con la noción de límite, propiedades que nos resultarán de utilidad en el cálculo de límites. La primera de ellas es un tanto obvia: nos dice que una sucesión convergente no puede tener dos límites distintos.

PROPOSICION 3.3.

Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell_1$$

y

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell_2$$

para ciertos números reales ℓ_1 y ℓ_2. Entonces:

$$\ell_1 = \ell_2$$

Demostración: La demostración resultará como consecuencia del ejercicio 2) b) del parágrafo 1.9, que a su vez es una consecuencia de la Arquimedianidad (Proposición 1.26)

Sea ϵ un número cualquiera mayor que cero. Por definición de límite y por las hipótesis de esta Proposición existe $n_0' \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0'$, entonces $|a_n - \ell_1| < \frac{\epsilon}{2}$. Análogamente, existe $n_0'' \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0''$, entonces $|a_n - \ell_2| < \frac{\epsilon}{2}$.

Sea n un número natural cualquiera mayor que n'_0 y que n''_0. Entonces:

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - a_n + a_n - \ell_2| \leq$$
$$\leq |\ell_1 - a_n| + |a_n - \ell_2| =$$
$$= |a_n - \ell_1| + |a_n - \ell_2| <$$

(ya que $n \geq n_0'$ y $n \geq n_0''$)

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

En consecuencia, resulta que el número $|\ell_1 - \ell_2|$,

que es ≥ 0, es menor que cualquier número positivo ϵ. Luego, por el mencionado ejercicio, debe ser $|\ell_1 - \ell_2| = 0$, de donde $\ell_1 - \ell_2 = 0$, o sea $\ell_1 = \ell_2$///

Hay otra demostración de esta Proposición que es más ilustrativa: supongamos que no es cierta la igualdad $\ell_1 = \ell_2$. Entonces uno de los dos es menor que el otro, digamos $\ell_1 < \ell_2$. Llamemos:

$$\epsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$$

$\ell_1 \quad \ell_2 - \epsilon \quad \ell_2$

$\ell_1 - \epsilon \quad \ell_1 + \epsilon \quad \ell_2 + \epsilon$

Por definición de límite, existe $n_0' \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0'$, es $|a_n - \ell_1| < \epsilon$.
Análogamente, existe $n_0'' \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0''$, es $|a_n - \ell_2| < \epsilon$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0'$ y $n \geq n_0''$. Entonces es $|a_n - \ell_1| < \epsilon$, o sea

$$-\epsilon < a_n - \ell_1 < \epsilon$$

de donde

$$\ell_1 - \epsilon < a_n < \ell_1 + \epsilon$$

Como $\epsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$, resulta:

$$\ell_1 - \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} < a_n < \ell_1 + \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$$

o sea:

$$\frac{\ell_1 - \ell_2}{2} < a_n < \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} \qquad (1)$$

Por otra parte, al ser $|a_n - \ell_2| < \epsilon$ es:

$$-\epsilon < a_n - \ell_2 < \epsilon$$

o sea:

$$\ell_2 - \epsilon < a_n < \ell_2 + \epsilon$$

y, recordando que $\epsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$

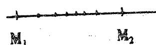
$$\ell_2 - \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} < a_n < \ell_2 + \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$$

de donde:

$$\frac{\ell_2 + \ell_1}{2} < a_n < \frac{3\ell_2 - \ell_1}{2} \qquad (2)$$

Ahora bien, (1) y (2) son incompatibles: por (1) sabemos que, en particular $a_n < \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}$, y por (2) que $\frac{\ell_1 + \ell_2}{2} < a_n$. Estas desigualdades no pueden ser ambas ciertas, con lo que llegamos a una contradicción. Nuestro punto de partida fue negar la igualdad $\ell_1 = \ell_2$, luego debe ser $\ell_1 = \ell_2$.

Para la siguiente propiedad, necesitamos primero una definición: una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ se dice *acotada* si existen números reales M_1 y M_2 tales que $M_1 \leq a_n \leq M_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.



Por ejemplo, la sucesión dada por $a_n = \frac{1}{n}$ es acotada, ya que $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En cambio, la sucesión dada por $a_n = n$ no es acotada, ya que cualquiera sea $M_2 \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_2 < n$ (Arquimedianidad).

PROPOSICION 3.4.

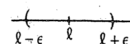
Toda sucesión convergente es acotada.

Demostración: Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión convergente y sea ℓ su límite:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \ell$$

Esto significa, de acuerdo a la Definición 3.2, que cualquiera sea $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, es $|a_n - \ell| < \epsilon$. Esta desigualdad es equivalente a: $-\epsilon < a_n - \ell < \epsilon$, o sea:

$$\ell - \epsilon < a_n < \ell + \epsilon$$



Como, por definición de límite, esto vale para *cualquier* $\epsilon > 0$, entonces en particular debe valer, por ejemplo, para $\epsilon = 1$. Es decir, debe existir un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$:

$$\ell - 1 < a_n < \ell + 1$$

Esto podría hacer pensar que ya tenemos el M_1 y el M_2 buscados ($\ell - 1$ y $\ell + 1$ respectivamente), pero hay que recordar que esa desigualdad vale *solamente para* $n \geq n_0$. De todas maneras, aquellos a_n para los cuales puede no valer son, en número, finitos ($a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}$), con lo cual la situación se remedia fácilmente.

Sean:

$H_1 = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}\}$ (luego $H_1 \leq a_1$, $H_1 \leq a_2, \ldots, H_1 \leq a_{n_0-1}$)

$H_2 = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}\}$ (luego $a_1 \leq H_2$, $a_2 \leq H_2, \ldots, a_{n_0-1} \leq H_2$)

y sean:

$M_1 = \min(\ell - 1, H_1)$ (luego $M_1 \leq \ell - 1$, $M_1 \leq H_1$)

$M_2 = \max(\ell + 1, H_2)$ (luego $\ell + 1 \leq M_2$, $H_2 \leq M_2$)

Entonces resulta $M_1 \leq a_n \leq M_2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. En efecto, si $n \in \mathbb{N}$, o bien es $n < n_0$ o bien es $n \geq n_0$. En el primer caso será $a_n \leq H_2 \leq M_2$, y en el segundo caso, $a_n < \ell + 1 \leq M_2$; análogamente resulta $M_1 \leq a_n$///

Como corolario inmediato, la sucesión dada por $a_n = n$ (o sea, $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$) no es convergente ya que como vimos antes, no es acotada.

La recíproca de esta Proposición (que sería: toda sucesión acotada es convergente) *no* es cierta.

Por ejemplo, la sucesión dada por $a_n = (-1)^n$ (o sea, $-1, 1, -1, 1, \ldots$) es claramente acotada pero *no* es convergente (ejercicio 7 del parágrafo anterior).

La siguiente propiedad es muy sencilla de probar y resultará muy útil más adelante:

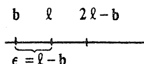
PROPOSICION 3.5.

Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión convergente con límite ℓ

a) Si $\ell > b$ para un cierto $b \in \mathbb{R}$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, es $a_n > b$.

b) Si $\ell < b$ para un cierto $b \in \mathbb{R}$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$ es $a_n < b$

Demostración: a) Como $\lim_{n \to \infty} a_n = \ell$, dado $\epsilon > 0$ se puede encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, $|a_n - \ell| < \epsilon$. Como esto vale para todo $\epsilon > 0$, en particular vale para $\epsilon = \ell - b$



Luego existe $n_0 \in N$ tal que, para $n \geq n_0$, $|a_n - \ell| < \ell - b$, o sea:

$$-(\ell - b) < a_n - \ell < \ell - b$$

de donde:

$$\ell - (\ell - b) < a_n < \ell + (\ell - b)$$

y por lo tanto:

$$b < a_n < 2\ell - b \quad \text{para } n \geq n_0$$

En particular, $b < a_n$ para $n \geq n_0$

▲ b) Igual que a), tomando $\epsilon = b - \ell$ ///

La recíproca de esta Proposición (si $a_n > b$ para todo $n \geq n_0$, entonces $\ell > b$, etc.) *no* es cierta. Por ejemplo, la sucesión dada por $a_n = \frac{1}{n}$ verifica $a_n > 0$ para todo n, y sin embargo su límite *no* es mayor que 0 (es *igual* a 0). De todas formas es *casi* cierta:

COROLARIO 3.6.

Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ *una sucesión convergente con límite* ℓ.

a) *Si* $a_n > b$ *para todo* $n \geq n_0$, *entonces* $\ell \geq b$

b) *Si* $a_n < b$ *para todo* $n \geq n_0$, *entonces* $\ell \leq b$

Demostración: ● a) Si no fuese $\ell \geq b$, sería $\ell < b$. Luego, por b) de la Proposición 3.5, existiría un n_0' tal que, para $n \geq n_0'$, $a_n < b$. Si $n_0'' = \max(n_0, n_0')$, entonces para $n \geq n_0''$ resulta simultáneamente $a_n > b$ y $a_n < b$, absurdo.

● b) De la misma forma ///

La siguiente propiedad es bastante obvia: si una sucesión está metida entre dos sucesiones que tienen el mismo límite, entonces dicha sucesión también tiene ese límite. Con más precisión:

PROPOSICION 3.7.

Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$ dos sucesiones convergentes con el mismo límite ℓ y sea $(c_n)_{n \geq 1}$ una sucesión tal que:

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \text{para todo } n \in N$$

Entonces $(c_n)_{n \geq 1}$ es convergente y su límite también es ℓ.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ cualquiera; existe $n_0' \in N$ tal que, para $n \geq n_0'$, $|a_n - \ell| < \epsilon$, y existe $n_0'' \in N$ tal que, para $n \geq n_0''$, $|b_n - \ell| < \epsilon$. Entonces, para $n \geq n_0 = \max(n_0', n_0'')$ valen las dos desigualdades.

Sea entonces $n \geq n_0$. Será:

$$\ell - c_n \leq \ell - a_n \leq |\ell - a_n| = |a_n - \ell| < \epsilon$$

$$c_n - \ell \leq b_n - \ell \leq |b_n - \ell| < \epsilon$$

En definitiva es $c_n - \ell < \epsilon$ y $\ell - c_n < \epsilon$ para $n \geq n_0$. La desigualdad $\ell - c_n < \epsilon$ es equivalente a $-\epsilon < c_n - \ell$. Luego, para $n \geq n_0$:

$$-\epsilon < c_n - \ell < \epsilon$$

o sea:

$$|c_n - \ell| < \epsilon \text{ ///}$$

Antes de enunciar y demostrar otras propiedades, consideremos la siguiente situación: supongamos tener dos sucesiones $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$. Para cada $n \in N$ podemos sumar los términos correspondientes, a_n y b_n, y obtener así $a_n + b_n$; esto nos da una nueva sucesión que será $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$. Análogamente podemos multiplicarlos y obtener otra sucesión $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 1}$, y si $b_n \neq 0$ para todo $n \in N$, podemos construir la sucesión $(a_n/b_n)_{n \geq 1}$.

Si las sucesiones $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$ son convergentes con límites ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente, queremos averiguar que sucederá con las tres sucesiones recién definidas: si serán convergentes y, en caso afirmativo, a que límite. Las respuestas, que ahora pasamos a dar, resultan bastante naturales.

PROPOSICION 3.8.

Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$ sucesiones convergentes. Entonces:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n$$

Demostración: Sean $\ell_1 = \lim_{n \to \infty} a_n$, $\ell_2 = \lim_{n \to \infty} b_n$.

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario; como es:

$$|a_n + b_n - (\ell_1 + \ell_2)| = |a_n - \ell_1 + b_n - \ell_2| \leq$$

$$\leq |a_n - \ell_1| + |b_n - \ell_2| \quad (1)$$

entonces para que resulte $|a_n + b_n - (\ell_1 + \ell_2)| < \epsilon$ bastaría con que fuese $|a_n - \ell_1| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|b_n - \ell_2| < \frac{\epsilon}{2}$

¿Podemos conseguir eso? Desde luego; la definición de límite nos dice que podemos hacer $|a_n - \ell_1|$ menor que *cualquier* número positivo con tal de tomar n grande. Y $\frac{\epsilon}{2}$ es un número positivo. Lo propio vale para $|b_n - \ell_2|$; un poco de precisión y terminamos la demostración:

Por ser $\lim_{n \to \infty} a_n = \ell_1$, existe $n_0' \in N$ tal que, para $n \geq n_0'$, es $|a_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$.

Por ser $\lim b_n = \ell_2$, existe $n_0'' \in N$ tal que, para $n \geq n_0''$, es $|b_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$.

Sea entonces $n_0 = \max(n_0', n_0'')$. Si $n \geq n_0$, será $n \geq n_0'$ y $n \geq n_0''$; luego será $|a_n - \ell_1| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|b_n - \ell_2| < \frac{\epsilon}{2}$. Por lo tanto, por la desigualdad (1), será $|a_n + b_n - (\ell_1 + \ell_2)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, y la Proposición queda probada ///

Para pasar al producto, hacemos primero una observación: si $(b_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión para la cual existe un número M tal que $|b_n| \leq M$ para todo $n \in N$, entonces $(b_n)_{n \geq 1}$ es acotada; en efecto, es $-M \leq b_n \leq M$ para todo $n \in N$. Recíprocamente, si la sucesión es acotada, entonces existe el tal número M con esa propiedad. Pues al ser acotada, existen números M_1 y M_2 con la propiedad de que $M_1 \leq b_n \leq M_2$. Sea $M = \max(|M_1|, |M_2|)$; entonces

$$-M \leq -|M_1| \leq M_1 \leq b_n \leq M_2 \leq |M_2| \leq M$$

(justificar cada desigualdad), o sea $-M \leq b_n \leq M$ para todo $n \in N$. Luego, el ser $(b_n)_{n \geq 1}$ acotada es equivalente a la existencia de un $M \in \mathbb{R}$ tal que $|b_n| \leq M$ para todo $n \in N$.

PROPOSICION 3.9.

Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$ sucesiones convergentes.

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = (\lim_{n \to \infty} a_n) \cdot (\lim_{n \to \infty} b_n)$$

Demostración: Sean $\ell_1 = \lim_{n \to \infty} a_n$, $\ell_2 = \lim_{n \to \infty} b_n$

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario, será:

$$|a_n . b_n - \ell_1 . \ell_2| = |a_n . b_n - \ell_1 \; b_n + \ell_1 \; b_n - \ell_1 \; \ell_2| =$$
$$= |(a_n - \ell_1) b_n + \ell_1 (b_n - \ell_2)| \leqslant$$
$$\leqslant |(a_n - \ell_1) b_n| + |\ell_1 (b_n - \ell_2)| =$$
$$= |a_n - \ell_1| \, |b_n| + |\ell_1| \, |b_n - \ell_2| \leqslant$$
(Proposición 3.4)
$$\leqslant |a_n - \ell_1| . M + |\ell_1| . |b_n - \ell_2|$$

para algún número M. Ahora se trata de elegir convenientemente n_0' y n_0''; por definición de límite, existe n_0' tal que, para $n \geqslant n_0'$:

$$|a_n - \ell_1| < \frac{\epsilon}{2M}$$

y existe n_0'' tal que, para $n \geqslant n_0''$:

$$|b_n - \ell_2| < \frac{\epsilon}{2\ell_1} \quad (\text{esto si } \ell_1 \neq 0)$$

Luego, si $n \geqslant n_0 = \max(n_0', n_0'')$, resulta $n \geqslant n_0'$ y $n \geqslant n_0''$ y entonces:

$$|a_n b_n - \ell_1 \ell_2| \leqslant |a_n - \ell_1| M + |\ell_1| \, |b_n - \ell_2| <$$

$$< \frac{\epsilon}{2M} . M + |\ell_1| . \frac{\epsilon}{2|\ell_1|} =$$

$$= \epsilon$$

(Si $\ell_1 = 0$, basta elegir n_0' tal que, para $n \geqslant n_0'$, $|a_n - \ell_1| < \epsilon/M$ y tomar después $n_0 = n_0'$) ///

Para la validez de la siguiente Proposición ya se necesitan restricciones:

PROPOSICION 3.10.

Sean $(a_n)_{n \geqslant 1}$ y $(b_n)_{n \geqslant 1}$ sucesiones convergentes tales que $b_n \neq 0$ para todo $n \in N$ y tales que $\lim_{n \to \infty} b_n \neq 0$. Entonces

$$\lim_{n \to \infty} (a_n / b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n / \lim_{n \to \infty} b_n$$

Demostración: Sean $\ell_1 = \lim_{n \to \infty} a_n$, $\ell_2 = \lim_{n \to \infty} b_n$. En primer término, observemos que es:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\ell_2} \right| = \left| \frac{\ell_2 - b_n}{b_n \; \ell_2} \right| = \frac{|\ell_2 - b_n|}{|b_n \; \ell_2|} =$$
$$= \frac{|b_n - \ell_2|}{|b_n| \, |\ell_2|}$$

Como $\lim_{n \to \infty} b_n = \ell_2$, entonces $\lim_{n \to \infty} |b_n| = |\ell_2|$ (ejercicio 2 del parágrafo anterior). Al ser $\ell_2 \neq 0$, es $|\ell_2| > 0$. Sea entonces r un número cualquiera entre 0 y $|\ell_2|$, $0 < r < |\ell_2|$; por Proposición 3.5, existe $n_0' \in N$ tal que, para $n \geqslant n_0'$, $|b_n| > r$, o sea $\frac{1}{|b_n|} < \frac{1}{r}$ Luego queda:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\ell_2} \right| = \frac{|b_n - \ell_2|}{|b_n| \, |\ell_2|} < \frac{|b_n - \ell_2|}{r \; |\ell_2|}$$

Entonces para $\epsilon > 0$ arbitrario, elegimos $n_0'' \in N$ tal que, para $n \geqslant n_0''$, sea $|b_n - \ell_2| < \epsilon \, r \, |\ell_2|$. Si $n_0 = \max(n_0', n_0'')$, entonces para $n \geqslant n_0$ será $n \geqslant n_0'$ y $n \geqslant n_0''$ y por lo tanto:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\ell_2} \right| < \frac{|b_n - \ell_2|}{r \, |\ell_2|} < \frac{\epsilon \; r \, |\ell_2|}{r \, |\ell_2|} =$$
$$= \epsilon$$

Con esto hemos probado que $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\ell_2}$; ahora la Proposición resulta inmediatamente usando la Proposición 3.9:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n / b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \quad (\text{Por } 3.9)$$
$$= \lim_{n \to \infty} a_n . \lim_{n \to \infty} \frac{1}{b_n} = \ell_1 . \frac{1}{\ell_2} =$$
$$= \ell_1 / \ell_2 \; ///$$

EJERCICIOS

1

Probar que si $(a_n)_{n \geqslant 1}$ es una sucesión convergente y c es un número real cualquiera, entonces $\lim_{n \to \infty} (c \, a_n) = c . \lim_{n \to \infty} a_n$

2

Probar que si $(a_n)_{n \geqslant 1}$ y $(b_n)_{n \geqslant 1}$ son sucesiones convergentes, entonces $\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n - \lim_{n \to \infty} b_n$

3

Probar que si $(a_n)_{n \geqslant 1}$ es convergente y k es un número natural cualquiera, entonces $\lim_{n \to \infty} a_n^k = (\lim_{n \to \infty} a_n)^k$ (Hacer inducción sobre k y usar Proposición 3.9).

4

Decir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles no (en caso afirmativo, dar una demostración; en caso negativo, dar un contraejemplo)

- a) Si $(a_n + b_n)_{n \geqslant 1}$ es convergente, entonces $(a_n)_{n \geqslant 1}$ y $(b_n)_{n \geqslant 1}$ son convergentes
- b) Si $(a_n + b_n)_{n \geqslant 1}$ es convergente y $(b_n)_{n \geqslant 1}$ es convergente, entonces $(a_n)_{n \geqslant 1}$ es convergente.
- c) Si $(a_n . b_n)_{n \geqslant 1}$ es convergente, entonces $(a_n)_{n \geqslant 1}$ y $(b_n)_{n \geqslant 1}$ son convergentes.
- d) Si $(a_n . b_n)_{n \geqslant 1}$ es convergente y $(b_n)_{n \geqslant 1}$ es convergente, entonces $(a_n)_{n \geqslant 1}$ es convergente.
- e) Si $(a_n . b_n)_{n \geqslant 1}$ es convergente y $(b_n)_{n \geqslant 1}$ es convergente con límite distinto de cero, entonces $(a_n)_{n \geqslant 1}$ es convergente.
- f) Si $(a_n^2)_{n \geqslant 1}$ es convergente, entonces $(a_n)_{n \geqslant 1}$ es convergente.
- g) Si $a_n < b$ para todo $n \in N$ y $(a_n)_{n \geqslant 1}$ es convergente, entonces $\lim_{n \to \infty} a_n < b$.
- h) Si $(a_n)_{n \geqslant 1}$ es convergente con límite 0 y $(b_n)_{n \geqslant 1}$ es acotada, entonces $(a_n \, b_n)_{n \geqslant 1}$ es convergente con límite 0.
- i) Si $(a_n)_{n \geqslant 1}$ es convergente con límite cero y $(b_n)_{n \geqslant 1}$ es acotada, entonces $(a_n / b_n)_{n \geqslant 1}$ es convergente con límite 0.

5

Sea $(a_n)_{n \geqslant 1}$ una sucesión de términos positivos convergentes y sea a su límite. Probar que $a \geqslant 0$ y que $\lim_{n \to \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$

6

Probar que, en general, el n_0 "depende de ϵ". Más precisamente, si existe $n_0 \in N$ tal que, para $n \geqslant n_0$, $|a_n - \ell| < \epsilon$ *para todo* $\epsilon > 0$, entonces $a_n = \ell$ para $n \geqslant n_0$ (o sea, $(a_n)_{n \geqslant 1}$ es constante a partir de cierto término) (Este ejercicio es totalmente trivial por el ejercicio 2) b) del parágrafo 1.9).

3.3. LIMITES INFINITOS

Consideremos la sucesión dada por $a_n = n$, es decir

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots$$

Hemos visto, en el parágrafo anterior, que esta sucesión no es convergente puesto que no es acotada. Se suele decir de esta sucesión que "tiende a infinito", queriéndose indicar así que, a medida que se avanza en la sucesión, se van superando todos los números que a uno se le ocurran. Pongamos esto en términos más precisos:

DEFINICION 3.11

Se dice que una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ *tiende a* $+\infty$,

y se escribe

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$$

si, cualquiera sea el número real $M > 0$, existe un $n_0 \in N$ tal que, para $n \geq n_0$ es

$$a_n > M$$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

EJEMPLOS

1

Consideremos, para $k \in N$ fijo, la sucesión dada por $a_n = n^k$. Afirmamos que es

$$\lim_{n \to \infty} n^k = +\infty$$

Para probarlo, sea M un número real positivo cualquiera.

Entonces la desigualdad $n^k > M$ es equivalente a $n > \sqrt[k]{M}$

Tomemos entonces n_0 natural tal que $n_0 > \sqrt[k]{M}$. Para $n \geq n_0$ será

$$n^k \geq n_0^k > (\sqrt[k]{M})^k = M$$

con lo que la afirmación queda probada.

2

Consideremos la sucesión dada por:

$$a_n = \frac{4n^2 + 2n}{2n - 3}$$

Afirmamos que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{4n^2 + 2n}{2n - 3} = +\infty$. Despejar n de la desigualdad $a_n > M$ es ahora más complicado, por lo cual sería conveniente hacer alguna acotación previa que deje una sola potencia de n en el numerador y una sola en el denominador (que lo deje en la forma $\frac{An^2}{Bn} = \frac{A}{B} n$). Para eso observamos que:

$$\frac{4n^2 + 2n}{2n-3} > \frac{4n^2}{2n-3}$$

(notar que ahora estamos acotando al revés que en el parágrafo 3.1). Para sacar el 3, nos valemos de que, si $n > 3$, entonces $-3 > -n$, o sea $2n - 3 > 2n - n$, de donde:

$$\frac{4n^2}{2n-3} > \frac{4n^2}{2n-n} = \frac{4n^2}{n} = 4n$$

Despejar n de $4n > M$ es muy fácil: $n > M/4$. Sea entonces $n_0 > \max(3, M/4)$; si $n \geq n_0$ valdrá

$$a_n = \frac{4n^2 + 2n}{2n - 3} > \frac{4n^2}{2n-3} > \frac{4n^2}{2n-n} = 4n \geq$$

$$\geq 4n_0 > 4\frac{M}{4} = M$$

lo que prueba lo afirmado.

En este parágrafo debemos dar dos definiciones más. La primera de ellas es totalmente natural:

DEFINICION 3.12.

Se dice que una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ *tiende a* $-\infty$, y se escribe $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$, si la sucesión $(-a_n)_{n \geq 1}$ tiende a $+\infty$ (en el sentido de la Definición 3.11).

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Así, por ejemplo, la sucesión dada por $a_n = -n^2$ tiende a $-\infty$ ya que $-a_n = -(-n^2) = n^2$ y esta última tiende a $+\infty$ según vimos.

La segunda definición se refiere a aquellas sucesiones para las cuales a_n crece indefinidamente sin tomar en cuenta el signo. Con más (mucha más) precisión:

DEFINICION 3.13.

Se dice que una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ tiende a ∞, y se escribe $\lim a_n = \infty$, si la sucesión $(|a_n|)_{n \geq 1}$ tiende a $+\infty$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Así, por ejemplo, la sucesión dada por $a_n = (-1)^n n^2$ tiende a ∞ ya que $|a_n| = |(-1)^n n^2| = |(-1)^n| |n^2| = |-1|^n n^2 = n^2$ y esta última tiende a $+\infty$.

Los límites infinitos tienen algunas propiedades que facilitan el cálculo de ciertos límites finitos:

PROPOSICION 3.14.

Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión *acotada* y sea $(b_n)_{n \geq 1}$ una sucesión tal que $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \infty$. Entonces

- a) $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \infty$
- b) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración: ♦ a) Que $(a_n)_{n \geq 1}$ sea acotada significa que existe un número K tal que $|a_n| \leq K$ para todo $n \in N$. Sea $M > 0$ arbitrario; como $|a_n + b_n| = |b_n + a_n| \geq |b_n| - |a_n| \geq |b_n| - K$, basta elegir $n_0 \in N$ tal que, para $n \geq n_0$, sea $|b_n| > M + K$. Entonces si $n \geq n_0$ resulta, por la desigualdad que acabamos de establecer, $|a_n + b_n| > M$. ///

♦ b) Según apuntamos antes, la sucesión $(a_n/b_n)_{n \geq 1}$ está definida si $b_n \neq 0$ para todo $n \in N$. Cuando $b_n \to \infty$, es seguro que a partir de cierto momento es $b_n \neq 0$ (ya que debe ser $|b_n| > M > 0$ por definición a partir de un cierto n_0). Entonces por $(a_n/b_n)_{n \geq 1}$ entendemos la sucesión que hasta n_0 vale cualquier cosa, y desde n_0 en adelante vale el cociente a_n/b_n.

Hecha esta aclaración, sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Como $|a_n|$ es acotada, será $|a_n| \leq K$ para todo $n \in N$; como b_n tiende a ∞, existe $n_0 \in N$ tal que, para $n \geq n_0$, es $|b_n| > K/\epsilon$. Luego, para $n \geq n_0$:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - 0 \right| = \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = \frac{|a_n|}{|b_n|} \leq \frac{K}{|b_n|} < \frac{K}{K/\epsilon} = \epsilon$$

con lo que queda probada la Proposición ///

PROPOSICION 3.15.

Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión tal que existe n_0' con la propiedad de que $|a_n| > r > 0$ para todo $n \geq n_0'$ (r fijo) y sea $(b_n)_{n \geq 1}$ una sucesión tal que $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \infty$. Entonces

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \,.\, b_n) = \infty$$

Demostración: Sea $M > 0$ arbitrario; como b_n tiende a ∞, existe n_0'' tal que, para $n \geq n_0''$, vale que $|b_n| > M/r$. Si $n_0 = \max(n_0', n_0'')$, entonces para $n \geq n_0$ será:

$$|a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| > r \,.\, \frac{M}{r} = M$$

lo que prueba la Proposición ///

Si $(a_n)_{n \geq 1}$ es convergente con límite a, entonces en particular es acotada y está en las condiciones de la Proposición 3.14. Si $a \neq 0$, entonces $|a| > 0$ y, por la Proposición 3.5, a) y el ejercicio 2 del parágrafo 3.1, $(a_n)_{n \geq 1}$ está en las condiciones de la Proposición 3.15. Luego valen las tres conclusiones establecidas en esas dos Proposiciones, lo cual se suele indicar de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a + \infty = \infty \\ a/\infty = 0 \\ a \,.\, \infty = \infty \qquad (\text{si } a \neq 0) \end{cases}$$

Estas tres igualdades son fáciles de recordar (porque son naturales), pero hay que tener cuidado en recordar también lo que *en realidad* quieren decir: $a + \infty = \infty$ significa que si una sucesión tiene límite a y otra tiene límite ∞, entonces la sucesión suma tiene límite infinito; análogamente para las otras dos. Teniendo en cuenta estas precauciones, su uso está permitido (y hasta recomendado).

Con las propiedades vistas hasta ahora, podemos comenzar a encarar el problema del *cálculo* de límites. Hasta ahora lo que sabemos es demostrar que determinado número es efectivamente el límite de una cierta sucesión, pero si sólo nos dan la sucesión, no sabemos como encontrar su límite (supuesto que exista).

Consideremos algunos de los ejemplos dados luego de la Definición 3.2 de límite.

La sucesión dada por $a_n = \dfrac{1}{2n^2 - 3}$ tiene un límite que se calcula facilmente; es:

$$a_n = \frac{1}{2n^2 - 3} = \frac{1/n}{2n - 3/n}$$

(dividiendo numerador y determinador por n)

Pero $1/n$ tiene límite 0 por Proposición 3.14, b); análogamente $-3/n$ tiene límite 0. Entonces $2n - 3/n$ tiene límite ∞ por Proposición 3.14, a). Luego a_n tiene límite 0 por Proposición 3.14, b) (es el caso $0/\infty = 0$)

El ejemplo 5, la sucesión dada por $a_n = \dfrac{n^2 + 2n + 1}{n^2 - 3n - 2}$ también tiene un límite fácil de calcular. Dividiendo numerador y denominador por n^2 resulta:

$$a_n = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 - 3n - 2} = \frac{1 + 2/n + 1/n^2}{1 - 3/n - 2/n^2}$$

Por Proposición 3.14, b); $2/n$, $1/n^2$, $-3/n$ y $-2/n^2$ tienen límite 0. Ahora aplicamos las Proposiciones 3.8 y 3.10 para concluir que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{\lim\,(1 + 2/n + 1/n^2)}{\lim\,(1 - 3/n - 2/n^2)} =$$

$$= \frac{\lim 1 + \lim 2/n + \lim 1/n^2}{\lim 1 + \lim(-3/n) + \lim(-2/n^2)} =$$

$$= \frac{1 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 1$$

Un error usual en que el alumno suele caer, al estudiar estos temas por primera vez, es creer que es distinto *calcular* un límite que *demostrar* que el número que resulte es efectivamente el límite de la sucesión dada. Nada de eso: en los dos ejemplos que hemos visto recién hemos *demostrado* que el límite de $1/(2n^2 - 3)$ es 0 y hemos *demostrado* que el límite de $(n^2+2n+1)/(n^2-3n-2)$ es 1 (las demostraciones se apoyaron en las Proposiciones 3.8, 3.10. y 3.14).

EJERCICIOS

1

Demostrar que si $(a_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión tal que $|a_n| > r > 0$ para todo $n \in N$ (r fijo) y $(b_n)_{n \geq 1}$ es tal que $b_n \neq 0$ para todo $n \in N$ pero $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n/b_n) = \infty$ (o sea, $a/0 = \infty$ si $a \neq 0$ como regla mnemotécnica).

2

Probar las siguientes afirmaciones:

▲ a) $(a_n)_{n \geq 1}$ acotada, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = +\infty$

▲ b) $(a_n)_{n \geq 1}$ acotada, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = -\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = +\infty$

▲ c) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = +\infty$

▲ d) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = -\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = -\infty$

▲ e) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = -\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (a_n \,.\, b_n) = -\infty$

3

Mostrar, dando un contraejemplo en cada caso, que las afirmaciones son falsas:

■ *a)* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \infty$

■ *b)* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (a_n \,.\, b_n) = \infty$

4

● a) Probar que si $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = +\infty$ y $a_n \geq b_n$ para todo $n \in N$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$

● b) Probar que si $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = -\infty$ y $a_n \leq b_n$ para todo $n \in N$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$

● c) Probar que si $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a > 0$ y $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = +\infty$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \,.\, b_n) = +\infty$

● d) Probar que si $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a < 0$ y $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = +\infty$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \,.\, b_n) = -\infty$

5

Calcular los siguientes límites:

★ a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+6n-1}{2n^2-6n-7}$

★ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+6n-1}{14n^2+16n+8}$

★ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+2n+1}{n^3+1}$

6

Sean f *y* g *funciones polinómicas de grados* h *y* k *respectivamente. (ver parágrafo 2.3). Para cada natural* n *están definidos* f(n) *y* g(n).

Probar:

♦ *a)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0$ *si* $h < k$

♦ *b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = \infty$ *si* $h > k$

¿Cuánto vale $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)}$ *si* $h = k$ *?*

(SUGERENCIA: generalizar los procedimientos seguidos en el ejercicio 5)

3.4.

ALGUNOS LIMITES IMPORTANTES

En el parágrafo 3.2, dadas dos sucesiones $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$, habíamos estudiado el comportamiento de las sucesiones $(a_n+b_n)_{n\geq 1}$, $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ y, si $b_n \neq 0$ para todo n, $(a_n/b_n)_{n\geq 1}$. Otra sucesión que podemos considerar, si $a_n \geq 0$ para todo $n\in N$, es $(a_n^{\,b_n})_{n\geq 1}$. Queremos llegar a probar que, si a_n tiene límite $a > 0$ y b_n tiene límite b, entonces $a_n^{\,b_n}$ tiene límite a^b. Vamos a tener que dar un largo rodeo para probar esto, cosa que empezamos a hacer en este parágrafo (y terminaremos de hacer en 3.7).

Nuestro primer resultado sería obvio si ya estuviese probada la mencionada propiedad. Vamos a considerar la sucesión dada por $a_n = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$. Como $1/n \to 0$, si esa propiedad fuese cierta, entonces el límite de $a^{1/n}$ debería ser $a^0 = 1$.

Probamos ese resultado directamente:

LEMA 3.16.

Si a es un número real mayor que 0, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

****

Demostración: Supongamos primero $a > 1$; recordemos la desigualdad de Bernoulli (Proposición 1.12) que dice que si $h > -1$, entonces para todo natural n vale:

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

Consideremos el caso $h = a^{1/n} - 1$; como la raíz n-sima es siempre positiva, entonces este h es mayor que -1, por lo cual resulta:

$$(1+(a^{1/n}-1))^n \geq 1+n(a^{1/n}-1)$$

o sea:

$$a \geq 1+n(a^{1/n}-1)$$

de donde podemos despejar

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$$

Como $a > 1$, entonces $a^{1/n} > 1$, luego $a^{1/n} - 1 > 0$. Entonces es

$$0 < a^{1/n} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$$

La sucesión a la derecha tiende claramente a 0 y la sucesión de la izquierda es constantemente 0, luego también tiende a 0. Entonces la sucesión $a^{1/n} - 1$, que está entre dos sucesiones con el mismo límite, debe también tener ese límite (por Proposición 3.7), es decir:

$$\lim_{n\to\infty} (a^{1/n}-1) = 0$$

Como $a^{1/n} = (a^{1/n}-1)+1$ y la sucesión constantemente igual a 1 tiene límite 1, entonces una aplicación de la Proposición 3.8 nos muestra que $\lim a^{1/n} = 0+1 = 1$.

Supongamos ahora $a < 1$ (y siempre $a > 0$). Entonces $1/a > 1$, con lo cual $\sqrt[n]{1/a} \to 1$, o sea $1/\sqrt[n]{a} \to 1$. Aplicando la Proposición 3.10 concluimos que $\sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{1/\sqrt[n]{a}}$ debe tender a $\dfrac{1}{1} = 1$

Por último, si $a = 1$ el Lema es trivial. ///

Probamos ahora un resultado que no es tan natural como el anterior:

PROPOSICION 3.17.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Demostración: Aplicamos nuevamente la desigualdad de Bernoulli (si $h > -1$, $(1+h)^n \geq 1+nh$ para todo $n\in N$). Tomando $h = n^{1/2n} - 1$ resulta:

$$(1+(n^{1/2n}-1))^n \geq 1+(n^{1/2n}-1)$$

de donde:

$$\sqrt{n} \geq 1+n(n^{1/2n}-1)$$

o sea

$$n^{1/2n} - 1 \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n} = \frac{1-1/\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

Aquí aplicamos la Proposición 3.8 (el miembro de la derecha tiende a 0 claramente) para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} (n^{1/2n}-1) = 0$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/2n} = 1$$

Ahora bien, $\sqrt[n]{n} = (\sqrt[2n]{n})^2 = (n^{1/2n})^2$, luego $\sqrt[n]{n}$ debe tender, por la Proposición 3.9, a $1.1 = 1$, lo cual prueba la Proposición ///

De acuerdo con esto y por 3.9, $\sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{n.n} = \sqrt[n]{n}.\sqrt[n]{n} = (\sqrt[n]{n})^2$ y más generalmente $\sqrt[n]{n^k} = (\sqrt[n]{n})^k$ tienen límite 1. Es posible probar más todavía (ver ejercicio 2 de este parágrafo).

Estudiemos ahora la sucesión dada por $a_n = r^n$ donde r es un número real cualquiera.

En primer término consideremos el caso $r > 1$; en ese caso será $r = 1+h$ con $h > 0$ y por lo tanto, por la desigualdad de Bernoulli:

$$r^n = (1+h)^n \geq 1+nh$$

Es muy fácil ver que $\lim\limits_{n\to\infty}(1+nh) = +\infty$. Luego ejercicio 4. a del parágrafo anterior) $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = +\infty$.

En segundo término, consideremos el caso $r < -1$.

Aquí será $|r| = -r > 1$, luego $\lim_{n\to\infty} |r|^n = +\infty$, o sea $\lim_{n\to\infty} |r^n| = +\infty$, de donde $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ (recordar Definición 3.13).

En tercer término, consideremos el caso $|r| < 1$ y $r \neq 0$. Entonces $|r^n| = \dfrac{1}{1/|r|^n}$ y como $1/|r| > 1$, el denominador tiende a $+\infty$. Luego $|r^n|$ tiende a 0, lo cual implica inmediatamente, a partir de la Definición 3.2 de límite, que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

Los casos $r = 0$ y $r = 1$ son triviales (tienen límites 0 y 1 respectivamente) y el caso $r = -1$ corresponde a la sucesión $-1, 1, -1, 1, \ldots$, que sabemos no es convergente. En resumen

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ +\infty & \text{si } r > 1 \\ \infty & \text{si } r < -1 \\ \text{no existe} & \text{si } r = -1 \end{cases}$$

EJERCICIOS

1

a) Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión acotada de términos positivos y tal que existe $r > 0$ para el que $a_n \geq r$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ (Sugerencia: 3.7 y 3.16)

b) Dar un ejemplo de una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ acotada de términos positivos para la cual no sea cierto que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

2

Probar

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1$;

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2-n} = 1$;

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3+2n^2+2n+1} = 1$;

d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3-4n^2+6n-3} = 1$;

e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f(n)} = 1$

si f es polinomial y el coeficiente de mayor grado es positivo.

3

Calcular:

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+2}$;

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n-2}$;

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1/2)^n+3}$;

d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+2^n}$;

e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$; $\quad (0 < a < b)$

4

a) Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de términos positivos tal que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

Probar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$ (SUGERENCIA: dado $\epsilon > 0$ resultará $0 < a_n < a_{n_0}\, \epsilon^{n-n_0}$ para un cierto n_0)

b) Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de términos positivos tal que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 0$.

Probar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$. (SUGERENCIA: será $(\ell - \frac{1}{2}\epsilon)^{n-n_0} \cdot a_{n_0} < a_n < (\ell + \frac{1}{2}\epsilon)^{n-n_0} a_{n_0}$ para un cierto n_0)

c) Aplicar los puntos a) y b) para calcular los siguientes límites:

i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$; ii) $\lim_{n\to\infty} r^n$; iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$;

iv) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+2^n}$;

v) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$ $\quad (0 < a < b)$

5

Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión convergente con límite a. Probar que

a) $\lim_{n\to\infty} a_n^n = +\infty$ si $a > 1$

b) $\lim_{n\to\infty} a_n^n = \infty$ si $a < -1$

c) $\lim_{n\to\infty} a_n^n = 0$ si $|a| < 1$

6

Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de términos positivos tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Probar que $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene un máximo

7

Sea $a_n = 2+(-1)^n$. Probar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, pero que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ no tiene límite (luego la recíproca del problema 4.b. no es cierta).

8

Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión tal que* $a_n \neq 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ *con* $|\ell| < 1$. *Probar que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Deducir nuevamente que* $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ *para* $|r| < 1$.

3.5.

UN CRITERIO DE CONVERGENCIA

DEFINICION 3.18.

Una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ se dice *creciente* si es $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y se dice *decreciente* si $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En cualquiera de los dos casos, la sucesión se dice *monótona*.

Si una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es creciente, entonces cada vez que sea $n > m$ será $a_n \geq a_m$. En efecto, si $n > m$, entonces $n = m+p$ con $p \in \mathbb{N}$. Luego $a_n = a_{m+p} \geq a_{m+p-1} \geq a_{m+p-2} \geq \ldots \geq a_{m+1} \geq a_m$.
(Para evitar los puntos suspensivos en este razonamiento, ver ejercicio 1 de este parágrafo).

Análogamente si $(a_n)_{n\geq 1}$ es decreciente, entonces cada vez que sea $n > m$ será $a_n \leq a_m$. En realidad sería más apropiado decir que la sucesión es creciente si $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (pues entonces resultaría que, a medida que crece n, crece a_n), pero la costum-

bre es reservar ese nombre para las que cumplen $a_{n+1} \geqslant a_n$ para todo $n \in N$ y llamar *estrictamente crecientes* a las que cumplen $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in N$.

Análogamente, se las llama *estrictamente decrecientes* cuando cumplen $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \in N$. Desde luego que toda sucesión estrictamente creciente es automáticamente creciente ($a_{n+1} > a_n$ implica $a_{n+1} \geqslant a_n$) y toda sucesión estrictamente decreciente es automaticamente decreciente ($a_{n+1} < a_n$ implica $a_{n+1} \leqslant a_n$).

Lo bueno de las sucesiones monótonas es que siempre tienen límite. Más precisamente:

PROPOSICION 3.19.

Sea $(a_n)_{n \geqslant 1}$ una sucesión monótona. Entonces:

★ a) Si $(a_n)_{n \geqslant 1}$ es acotada, entonces $(a_n)_{n \geqslant 1}$ es convergente.

★ b) Si $(a_n)_{n \geqslant 1}$ no es acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. En caso de ser creciente, es $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, y en caso de ser decreciente es $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Demostración: ● a) Consideremos el conjunto

$$A = \{a_n : n \in N\}$$

o sea A es el conjunto de todos los valores que toma la sucesión. Como ésta es acotada, existirá un número real M tal que $|a_n| \leqslant M$ para todo $n \in N$. Esto significa que $-M \leqslant a_n \leqslant M$, o sea, en términos de A, el conjunto A es acotado superiormente e inferiormente.

Sabemos que la sucesión es monótona, lo cual significa que o bien es creciente o bien es decreciente. Veamos que en ambos casos tiene límite.

Sea $(a_n)_{n \geqslant 1}$ creciente; sabemos que existe

$$a = \sup A$$

Por Proposición 1.22, cualquiera sea $\epsilon > 0$ existe un elemento de A, digamos a_{n_0}, tal que $a - \epsilon < a_{n_0}$. Pero entonces, para $n \geqslant n_0$:

$$a - \epsilon < a_{n_0} \leqslant a_n \leqslant a < a + \epsilon$$

o sea

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$$

de donde, siempre para $n \geqslant n_0$:

$$|a_n - a| < \epsilon$$

lo cual prueba que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Sea ahora $(a_n)_{n \geqslant 1}$ decreciente; sabemos que existe

$$a' = \inf A$$

Por ejercicio 4 del parágrafo 1.8, cualquiera sea $\epsilon > 0$ existe un elemento de A, digamos $a_{n'_0}$, tal que $a_{n'_0} < a' + \epsilon$. Luego, para $n \geqslant n'_0$:

$$a' - \epsilon < a' \leqslant a_n \leqslant a_{n'_0} < a' + \epsilon$$

o sea

$$a' - \epsilon < a_n < a' + \epsilon$$

de donde, siempre para $n \geqslant n'_0$:

$$|a_n - a| < \epsilon$$

lo cual prueba, ya que ϵ era cualquiera, que $\lim_{n\to\infty} a_n = a'$.

● b) Supongamos ahora que la sucesión es creciente y no acotada. Al ser creciente la sucesión, entonces necesariamente está acotada inferiormente (por ejemplo, por a_1, ya que es $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$); luego, si la suponemos no acotada, querrá decir que no está acotada superiormente. En otras palabras, cualquiera sea el número $M > 0$, existirá un término de la sucesión, digamos a_{n_0}, tal que $a_{n_0} > M$. Pero entonces, para $n \geqslant n_0$:

$$a_n \geqslant a_{n_0} > M$$

Recordando la Definición 3.11, vemos que esto significa que $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Por último, si $(a_n)_{n \geqslant 1}$ es decreciente y no acotada, entonces $(-a_n)_{n \geqslant 1}$ es creciente (al ser $a_{n+1} \leqslant a_n$ es $-a_{n+1} \geqslant -a_n$) y no acotada. Luego, por lo que acabamos de ver, $\lim_{n\to\infty} (-a_n) = +\infty$ o sea, por Definición 3.12, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ///

Veamos un ejemplo de aplicación de esta Proposición. Consideremos la sucesión

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$$

o sea la sucesión definida inductivamente por:

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \end{cases}$$

Afirmamos que esta sucesión es acotada. En efecto, es claramente $0 \leqslant a_n$ para todo $n \in N$ y además es $a_n \leqslant 2$ para todo $n \in N$ como lo prueba el siguiente argumento por inducción: es $a_1 \leqslant 2$ pues si fuese $a_1 > 2$ sería $\sqrt{2} > 2$, o sea elevando el cuadrado, $2 > 4$, absurdo; y supuesto $a_n \leqslant 2$, resulta $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \leqslant \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$.

También es creciente; en efecto, si fuese $a_{n+1} < a_n$ para algún $n \in N$, entonces sería $\sqrt{2+a_n} < a_n$ o sea $2+a_n < a_n^2$, de donde $a_n^2 - a_n - 2 > 0$; de aquí obtenemos, por completación de cuadrados, $(a_n - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2 > 0$, o sea $(a_n - \frac{1}{2})^2 > \frac{9}{4}$.

Luego $|a_n - \frac{1}{2}| > \frac{3}{2}$, lo cual implica $a_n - \frac{1}{2} > \frac{3}{2}$ ó $a_n - \frac{1}{2} < -\frac{3}{2}$. La primera desigualdad lleva a $a_n > \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$, lo que sabemos que no puede ser y la segunda a $a_n < \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$ que tampoco puede ser (era $0 \leqslant a_n \leqslant 2$ para todo $n \in N$)

La Proposición 3.19 nos dice que existe $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$, pero en este caso podemos saber algo más que su mera existencia: podemos saber cuánto vale. En efecto, en la igualdad

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$$

tomamos límite cuando $n \to \infty$ y obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n}$$

Al ser $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ es $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \ell$ (ejercicio 6.a. del parágrafo 3.1) y es $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n} = \sqrt{2+\ell}$ (ejercicio 5 del parágrafo 3.2 y Proposición 3.8). En definitiva:

$$\ell = \sqrt{2+\ell}$$

de donde

$$\ell^2 = 2 + \ell$$

o sea

$$\ell^2 - \ell - 2 = 0$$

De aquí se deduce (usando ejercicio 2.6 del parágrafo 2.3), que $\ell = 2$ ó $\ell = -1$. El segundo caso no puede ser, ya que al ser $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in N$, debe ser $\ell \geqslant 0$. Luego:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

EJERCICIOS

1

Sea $(a_n)_{n \geqslant 1}$ una sucesión creciente. Probar que si $n > m$, entonces $a_n > a_m$ (Sugerencia: considerar

$P(n) =$ "$a_{k+n} > a_k$ para todo $k \in N$" y usar inducción).

2

Probar que la única sucesión creciente y decreciente a la vez es la sucesión constante.

3

Para las siguientes sucesiones, decir cuáles son crecientes, cuáles estrictamente crecientes, cuáles decrecientes, cuáles estrictamente decrecientes, y cuáles acotadas:

★ *a)* $a_n = \dfrac{n}{n+1}$; ★ *b)* $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$;

★ *c)* $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$;

★ *d)* $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$

4

Probar que las siguientes sucesiones son convergentes, y calcular su límite:

● a) $a_1 = \sqrt{3}$; $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$ ● b) $a_1 = \sqrt{5}$; $a_{n+1} = \sqrt{5 + a_n}$

3.6.

EL NUMERO e

Vamos a aplicar el resultado del parágrafo anterior al estudio de la convergencia de una sucesión particular. Consideramos la sucesión cuyo termino general es:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Afirmamos que esta sucesión es acotada y estrictamente creciente.

Observamos primero, que, por la fórmula del binomio (Teorema 1.13), es:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k . 1^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n!}{n^k\,(n-k)!}$$

Ahora bien, por definición de factorial, $n! = n.(n-1)\ldots 3.2.1$ y $(n-k)! = (n-k)(n-k-1)\ldots 3.2.1$. Luego debe ser:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))(n-k)(n-k-1)\ldots 3.2.1.}{(n-k)(n-k-1)\ldots\ldots 3.2.1} =$$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))$$

con lo cual

$$\frac{n!}{n^k(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{n^k} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{n.n\ldots n} =$$

$$= \frac{n}{n} . \frac{n-1}{n} \, \frac{n-2}{n} \ldots \frac{n-(k-1)}{n} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right).\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

En definitiva:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \qquad (1)$$

Con esto es fácil ver que la sucesión es estrictamente creciente.

En efecto:

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n+1-1}{n+1}\right) >$$

$$> \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) >$$

$$> \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) =$$

$$= a_n$$

También con ayuda de (1) probamos ahora que la sucesión es acotada.

Es claro que es acotada inferiormente por 2, ya que $a_1 = 2$ y $a_1 < a_n$ para todo $n \in N$ (esto último por ser estrictamente creciente). Para ver que es acotada superiormente, notemos que todos los factores entre paréntesis en (1) son menores que 1 (y mayores que cero). Luego:

$$a_n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

Pero $k! = 1.2.3.\ldots.k = 2.3.\ldots.k > 2.2.\ldots.2 = 2^{k-1}$ para todo $k \in N$. Luego:

$$a_n < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} =$$

(ejercicio 5.b de parágrafo 1.4)

$$= 1 + \frac{(1/2)^n - 1}{1/2 - 1} = 1 + \frac{(1/2)^n - 1}{-1/2} =$$

$$= 1 + 2.\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 1 + 2.1 =$$

$$= 3$$

ya sabemos entonces que la sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es acotada y estrictamente creciente. La proposición 3.19 nos dice que entonces esa sucesión tiene límite. Dicho límite se suele indicar con la letra e:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

y todo lo que podemos hasta ahora saber de él es que $2 < e \leqslant 3$.

Este número es de una gran importancia y va a aparecer repetidamente a lo largo de este libro

NOTA

En la demostración de la convergencia de la sucesión dada por $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ hemos hecho uso en varios razonamientos de los *puntos suspensivos*. Mientras uno use puntos suspensivos como notación (por ejemplo, indicar $\sum_{k=1}^{n} a_k$ como $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$), nada hay que objetar. Pero cuando se usan en un razonamiento y dejan de ser una notación,

entonces el razonamiento es, desde un punto de vista *muy* formal, objetable. ¿Por qué los hemos usado entonces? (por ejemplo, para ver que $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-(k-1))$ ó que $k! > 2^{k-1}$). Hay dos motivos importantes: el primero es que las veces que los hemos usado, y las que los vamos a usar, el razonamiento puede reemplazarse por un razonamiento inductivo (por ejemplo, que $k! \geqslant 2^{k-1}$ para $k \in N$ se prueba así: para $k = 1$ vale la igualdad, y si suponemos que $k! \geqslant 2^{k-1}$, entonces $(k+1)! = (k+1).k! \geqslant 2.k! \geqslant 2.2^{k-1} = 2^k = 2^{(k+1)-1}$).

Y el segundo es que el principio de inducción es una herramienta potente para probar resultados... si sabemos previamente cuál es ese resultado. Es decir, con inducción nomás no vamos a poder *conjeturar* un cierto resultado, sólo podremos probar que es cierto una vez conjeturado. En cambio el uso de puntos suspensivos puede permitir esas conjeturas. Hay un ejemplo elemental relacionado con una conocida anécdota: cuando C. F. Gauss (1777-1855), el más famoso de los matemáticos de todas las épocas (se lo ha llamado *el príncipe de los matemáticos*; no importa que usted no lo conozca, los matemáticos suelen no ser famosos), cuando Gauss, decíamos, tenía 8 años, su maestro, cansado de atender su clase, les dijo a los alumnos que sumasen todos los números del 1 al 100, confiado en tenerlos en silencio una buena hora. A los pocos minutos, el niño Gauss le entrega un papel con el resultado: 5050. Su razonamiento había sido muy sencillo: para calcular $1+2+3+\ldots+98+99+100$ observemos que $1 + 100$ da 101, que $2 + 99$ también da 101, $3 + 98$ también da 101, etc. Luego estamos sumando 101 cincuenta veces, con lo cual el resultado deberá ser $50.101 = 5.050$. Exactamente el mismo razonamiento muestra que $1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$. Pero si estamos armados solamente con el principio de inducción, esperaremos eternamente para sumar $1+2+\ldots+n$ si nadie conjetura (a la manera de Gauss) el resultado. Conclusión: hay que aprender a razonar con los puntos suspensivos; si quiere, el resultado que así obtenga podrá probarlo formalmente por inducción (Ver ejercicio 1 de este parágrafo). De ahora en adelante, entonces, usaremos varias veces este tipo de razonamientos, y el lector (alumno o docente) *muy* escrupulosos podrá convertir ese razonamiento, un tanto ambiguo, en uno inductivo, y por lo tanto más preciso.

Una vez sabido que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, se puede probar un resultado más general:

si $(a_n)_{n \geqslant 1}$ es una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Para probar esto necesitamos usar un nuevo concepto. Para cada a_n, llamaremos *parte entera* de a_n, e indicaremos $[a_n]$, al mayor número entero m que verifique la desigualdad $m \leqslant a_n$; así $[\frac{2}{5}] = 0$, $[\frac{9}{2}] = 4$, $[-\frac{9}{2}] = -5$, etc. (también se la llama *característica* de a_n). Observemos que la existencia de la parte entera de cualquier número es una consecuencia de la Propiedad de Completitud (parágrafo 1.8) y que resulta

$$[a_n] \leqslant a_n < [a_n] + 1$$

De esta última doble desigualdad se deduce inmediatamente que si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} [a_n] = +\infty$, que si $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} [a_n] = -\infty$

Supongamos primero $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. A partir de un cierto n_1, será $a_n > 0$; luego $1 + \frac{1}{a_n} > 1$ y entonces, siendo $[a_n] \leqslant a_n < [a_n] + 1$, será por Proposición 1.35:

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} < \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{[a_n]} \leqslant \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leqslant$$

$$< \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{a_n} < \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}$$

o sea:

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} < \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1} \quad (2)$$

Estudiemos los límites de las sucesiones que están en los extremos de esta doble desigualdad.

En primer término, observemos que es:

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} = \left(1 + \frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]+1} \left(1 + \frac{1}{[a_n]+1}\right)^{-1}$$

Como $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, dado $\epsilon > 0$ existe n_2 tal que, si $n \geqslant n_2$

$$e - \epsilon < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e + \epsilon \quad (3)$$

y como $\lim ([a_n] + 1) = +\infty$, existe n_3 tal que, si $n \geqslant n_3$, entonces $[a_n] + 1 > n_2$. Siendo $[a_n] + 1$ un número natural mayor que n_2, será por (3):

$$e - \epsilon < \left(1 + \frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]+1} < e + \epsilon \quad (\text{si } n \geqslant n_3)$$

El $\epsilon > 0$ era cualquiera, luego $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]+1} = e$.

Por otra parte, al tender $[a_n] + 1$ a $+\infty$, $(1 + 1/([a_n] + 1))^{-1}$ tiende a $1^{-1} = 1$. En definitiva, el primer miembro de (2) tiende al número e.

En cuanto al tercer miembro de (2), es $\left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1} = \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]} . \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)$ y un razonamiento calcado del anterior prueba que su límite es $e.1 = e$.

En definitiva, el primer y tercer miembro de (2) tienden al número e, luego lo mismo le debe ocurrir a lo que está en el medio (Proposición 3.7.):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Consideremos ahora el caso $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Eso significa $\lim_{n\to\infty}(-a_n) = +\infty$ y entonces, llamando $b_n = -a_n$:

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \left(1 - \frac{1}{b_n}\right)^{-b_n} = \left(\frac{b_n - 1}{b_n}\right)^{-b_n} =$$

$$= \left(\frac{b_n}{b_n - 1}\right)^{b_n} = \left(\frac{b_n - 1 + 1}{b_n - 1}\right)^{b_n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{b_n - 1}\right)^{b_n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{b_n - 1}\right)^{b_n - 1}\left(1 + \frac{1}{b_n - 1}\right)$$

y como $b_n - 1 \to +\infty$, entonces $\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ tiende a $e.1 = e$.

Ahora el caso más general, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, resulta fácil combinando los dos precedentes: pues es $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} (-|a_n|) = -\infty$ y entonces, por lo que ya probamos, dado $\epsilon > 0$ existen n_1 y n_2 tales que

$$|(1+\frac{1}{|a_n|})^{|a_n|} - e| < \epsilon \quad \text{para } n \geq n_1$$

$$|(1+\frac{1}{-|a_n|})^{-|a_n|} - e| < \epsilon \qquad n \geq n_2$$

Sea $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Entonces para $n \geq n_0$ será $n \geq n_1$ y $n \geq n_2$, de donde

$$|(1+\frac{1}{a_n})^{a_n} - e| < \epsilon \qquad \text{para } n \geq n_0$$

ya que a_n es $|a_n|$ ó $-|a_n|$ y en ambos casos vale la desigualdad.

Como $\epsilon > 0$ era cualquiera, entonces $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e$

En muchos casos de límites del tipo 1^∞ (o sea, $a_n^{b_n}$ con $a_n \to 1$, $b_n \to \infty$), aparece el número e. Por ejemplo, consideremos la sucesión dada por:

$$a_n = (\frac{n+1}{n+2})^{3n+2}$$

Entonces resulta:

$$a_n = (\frac{n+2-1}{n+2})^{3n+2} = (1-\frac{1}{n+2})^{3n+2} =$$

$$= (1-\frac{1}{n+2})^{3(n+2-2)+2} = (1-\frac{1}{n+2})^{3(n+2)-4} =$$

$$= [(1-\frac{1}{n+2})^{-(n+2)}]^{-3} [1-\frac{1}{n+2}]^{-4}$$

y, aplicando los resultados anteriores:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-3} . 1^{-4} = e^{-3}$$

EJERCICIOS

1

★ a) Probar que $\frac{n!}{n^k (n-k)!} \leq 1$ para todo $n \in N$ y $k \in N$, $1 \leq k \leq n$ (Inducción)

★ b) Probar que $\frac{n!}{(n-k)!} = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i)$ (Inducción)

★ c) Usar b) para probar que $\frac{n!}{n^k (n-k)!} = \prod_{i=1}^{k-1} (1-\frac{i}{n})$ (sin inducción, probar previamente, por inducción, que $\prod_{i=1}^{m} a_i / \prod_{i=1}^{m} b_i = \prod_{i=1}^{m} (a_i/b_i)$)

2

Hallar los límites de las sucesiones dadas por:

● *a)* $a_n = (1-\frac{1}{n})^n$; ● *b)* $a_n = (1-\frac{1}{n^2})^n$

● *c)* $a_n = (\frac{2n+1}{2n+3})^{3n-2}$; ● *d)* $a_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

● *e)* $a_n = \frac{n}{e^n}$; ● *f)* $a_n = (1-\frac{1}{n})^{n^2}$

● *g)* $a_n = (1+\frac{1}{2n})^{4n+1}$; ● *h)* $a_n = (\frac{3n+4}{3n+2})^{2n-1}$

● *i)* $a_n = (1+\frac{a}{n})^{bn}$

LA FUNCION LOGARITMO 3.7.

Consideremos la función $f: R \to R$ dada por:

$$f(x) = e^x$$

Observemos que, como toda potencia de exponente real, e^x es mayor que cero cualquiera sea $x \in R$. Por lo tanto podemos indicar esta función como $f: R \to R_{>0}$

PROPOSICION 3.28.

La función $f: R \to R_{>0}$ dada por $f(x) = e^x$ es biyectiva.

Demostración: Veamos primero que es inyectiva. Como $e > 1$, entonces si $x \neq x'$, digamos $x < x'$, entonces la Proposición 1.35 nos dice que $e^x < e^{x'}$, luego $f(x) < f(x')$, en particular $f(x) \neq f(x')$, lo cual prueba la inyectividad.

Para ver que es suryectiva, tomemos un y cualquiera en $R_{>0}$, es decir $y > 0$. Consideremos el conjunto

$$A = \{x \in R : e^x \leq y\}$$

Este conjunto está acotado superiormente. En efecto, sea $n \in N$ tal que $y \leq n$. Si $x > n$, entonces $e^x > e^n > 2^n = (1+1)^n \geq 1 + n.1 = n+1 > y$, luego $e^x > y$, es decir $x \notin A$. Esto prueba que el n elegido es cota superior de A.

Este conjunto es también no vacío. Para probarlo, notemos que siendo $e > 1$ es $\lim_{n\to\infty} e^n = \infty$. Luego $\lim_{n\to}$ $e^{-n} = 0$, lo cual implica que dado $\epsilon > 0$ existe n_0 ta que, si $n \geq n_0$, $|e^{-n}| < \epsilon$, o sea $e^{-n} < \epsilon$. Tomemos $\epsilon = y$, y sea n_0 el correspondiente a este valor de ϵ. Entonces, en particular, $e^{-n} < y$, lo cual significa que $-n_0 \in A$ y entonces $A \neq \emptyset$.

Siendo A acotado superiormente y no vacío, existe

$$s = \sup A$$

Probamos ahora que $e^s = y$, lo cual prueba la sur yectividad de f ya que $y > 0$ era cualquiera.

Supongamos $e^s \neq y$; caben entonces dos alternati vas: $e^s < y$ ó $e^s > y$. Descartémoslas:

Si fuese $e^s < y$, llamando $\epsilon = y - e^s$ resulta $\epsilon > 0$. Por Lema 1.33, existen números racionales r y r' tale que $r < s < r'$ y además $e^{r'} - e^r < \epsilon$. En particular:

$$e^{r'} - e^s < e^{r'} - e^r < \epsilon = y - e^s$$

o sea:

$$e^{r'} - e^s < y - e^s$$

de donde deducimos $e^{r'} < y$ Pero esto implica que $r' \in A$; esto no puede ser ya que s es el supremo de A y en particular, es cota superior de A (con lo cual, a ser $r' \in A$, debería ser $r' \leq s$, lo que no es así).

Si fuese $e^s > y$, sea $\epsilon = e^s - y > 0$. Usando nuevamente el Lema 1.33, obtenemos r, r' racionales tale que $r < x < r'$ y $e^{r'} - e^r < \epsilon$. Entonces:

$$e^s - e^r < e^{r'} - e^r < \epsilon = e^s - y$$

o sea:

$$e^s - e^r < e^s - y$$

de donde deducimos $-e^r < -y$, o sea $e^r > y$. Luego $e^r > e^x$ para todo $x \in A$; eso implica que $r > x$ para todo $x \in A$ (si fuese $r \leq x$ sería $e^r \leq e^x$ por 1.35), o sea r es cota superior de A. Eso no puede ser porque al ser s el supremo de A, entonces s es la *menor* cota superior (y entonces sería $s \leq r$, lo que no es así). Luego debe ser $e^s = y$, con lo cual f es biyectiva ///

Al ser f biyectiva, tiene una inversa f^{-1}. Esta inversa tiene la importancia suficiente como para merecer un nombre:

DEFINICION 3.21.

Si $f: R \to R_{>0}$ es la función dada por $f(x) = e^x$, entonces su inversa se denomina *función logaritmo* y se indica como $\ln: R_{>0} \to R$. Esto define, *para cada* $x > 0$, un número real $\ln x$ caracterizado por la propiedad.

$$\ln x = y \iff e^y = x$$

Dicho número, $\ln x$, se llama *logaritmo natural* de x.

****

Las proposiciones 1.42 y 1.43 tienen como consecuencias inmediatas dos propiedades de los logaritmos naturales:

PROPOSICION 3.22.

▲ a) Si x, y son números reales *mayores que cero*, entonces

$$\ln(x.y) = \ln x + \ln y$$

▲ b) Si x es un número real *mayor que cero* y si $y \in R$ es cualquiera:

$$\ln x^y = y.\ln x$$

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración: ▲ a) Es $e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln x} . e^{\ln y} = x.y$; luego, por definición de logaritmos, $\ln(x.y) = \ln x + \ln y$.

▲b) Es $e^{y \ln x} = (e^{\ln x})^y = x^y$, luego, por definición de logaritmos, $\ln(x^y) = y.\ln x$ ///

EJERCICIOS

1

Probar que si $a \in R$, $0 < a \neq 1$, entonces la función $f: R \to R_{>0}$ dada por $f(x) = a^x$ es biyectiva (si $a > 1$, copiarse sin pudor la Proposición 3.20 poniendo a donde aparezca e; si $0 < a < 1$, usar que $1/a > 1$ y la cabeza).

2

Indicando por $\log_a: R_{>0} \to R$ la inversa $f(x) = a^x$ probar que:

- a) $\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$ para $x, y \in R_{>0}$
- b) $\log_a(x^y) = y.\log_a x$ para $x \in R_{>0}$, $y \in R$
- c) $a^x = e^{x \ln a}$ para $x \in R$
- d) $\log_a x = \dfrac{\log_a y}{\log_x y}$ para $x \in R_{>0}$, $x \neq 1$, $y \in R_{>0}$
- e) Si $0 < x < y$, entonces $\log_a x < \log_a y$ si $a > 1$ (Usar 1.35)
- f) si $0 < x < y$, entonces $\log_a x > \log_a y$ si $0 < a < 1$ (Usar 1.39)

3

Sean a,b números reales mayores que cero. Probar que cualquiera sea $x \in R$ es:

$$(ab)^x = a^x b^x$$
$$(a/b)^x = a^x / b^x$$

(calcular $\ln(ab)^x$ y usar el hecho de que la función $\ln$ es inyectiva por el Ejercicio 2.e.)

3.8. OTRAS PROPIEDADES DEL LIMITE

Consideremos ahora una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ de términos positivos y que tenga límite positivo a. Podemos considerar la sucesión $(\ln a_n)_{n \geq 1}$ y tambien el logaritmo natural del límite, $\ln a$. Ambas cosas son la misma:

PROPOSICION 3.23.

Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de términos *positivos* con límite también positivo:

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n > 0$$

Entonces:

$$\lim_{n \to \infty} (\ln a_n) = \ln a$$

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ cualquiera. Como $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, entonces $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a} = 1$ por Proposición 3.10. Al ser $\epsilon > 0$ es $e^\epsilon > e^0 = 1$, luego por Proposición 3.5 a), existe $n_1 \in N$ tal que, para $n \geq n_1$, es $\frac{a_n}{a} < e^\epsilon$. Análogamente, como $e^{-\epsilon} = 1/e^\epsilon < 1$, por Proposición 3.5 b) existe n_2 tal que, para $n \geq n_2$, es $\frac{a_n}{a} > e^{-\epsilon}$. Si $n_0 = \max(n_1, n_2)$ entonces para $n \geq n_0$, vale que:

$$e^{-\epsilon} < \frac{a_n}{a} < e^\epsilon$$

Por ejercicio 2. f) del parágrafo anterior:

$$\ln e^{-\epsilon} < \ln \frac{a_n}{a} < \ln e^\epsilon$$

o sea, por propiedades del logaritmo:

$$-\epsilon < \ln a_n - \ln a < \epsilon$$

que equivale a:

$$|\ln a_n - \ln a| < \epsilon \quad (\text{para } n \geq n_0)$$

Como $\epsilon > 0$ era cualquiera, esto prueba que $\lim_{n \to \infty} \ln a_n = \ln a$ ///

Probamos ahora una desigualdad que enseguida usaremos:

LEMA 3.24.

Sea a un número real *mayor que* 1. Entonces para todo $x \in R$ es

$$|a^x - 1| \leq a^{|x|} - 1$$

****

Demostración: Si $x \geq 0$, entonces $a^x \geq a^0 = 1$ y entonces

$$|a^x - 1| = a^x - 1 = a^{|x|} - 1$$

Si $x < 0$, entonces $-x > 0$ y por lo tanto:

$$|a^x - 1| = |1 - a^x| = \left|1 - \frac{1}{a^{-x}}\right| =$$

$$= \left|\frac{a^{-x} - 1}{a^{-x}}\right| = \frac{1}{|a^{-x}|} . |a^{-x} - 1| =$$

$$= \frac{1}{a^{-x}}(a^{-x} - 1) = \frac{1}{a^{|x|}}(a^{|x|} - 1) \leq$$

$$\leq a^{|x|} - 1 \;///$$

Ahora probamos un resultado que quedará incluído en la Proposición más general que se probará después.

LEMA PROVISORIO 3.25.

Si a es un número real *mayor que cero* y $(b_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión convergente con límite b, entonces

$$\lim_{n \to \infty} a^{b_n} = a^b$$

****

Demostración: Supongamos primero $a > 1$. Entonces:

$$|a^{b_n} - a^b| = |a^{b_n - b + b} - a^b| = |a^{b_n - b}\, a^b - a^b| =$$

$$= |(a^{b_n - b} - 1)\,.\,a^b| =$$

$$= |a^{b_n - b} - 1|\,.\,|a^b| \leqslant \text{ (por lema 3.24)}$$

$$\leqslant (a^{|b_n - b|} - 1)\,.\,a^b$$

Ahora bien, cualquiera sea $k \in N$, existe n_0 tal que, para $n \geqslant n_0$:

$$|b_n - b| < \frac{1}{k}$$

Luego:

$$|a^{b_n} - a^b| \leqslant (a^{|b_n - b|} - 1)\,.\,a^b <$$

$$< (a^{1/k} - 1)\,.\,a^b < \text{ (Ver lema 3.16)}$$

$$< \frac{a-1}{k}\,.\,a^b$$

Sea $\epsilon > 0$ y sea $k \in N$ tal que:

$$k > \frac{(a-1)\,a^b}{\epsilon}$$

Entonces resulta para $n \geqslant n_0$:

$$|a^{b_n} - a^b| < \frac{a-1}{k}\,.\,a^b < \frac{a-1}{(a-1)a^b/\epsilon}\,.\,a^b =$$

$$= \epsilon$$

y como $\epsilon > 0$ era cualquiera, resulta que $a^{b_n} \to a^b$

Si $a = 1$, el Lema es trivial. Si $0 < a < 1$, entonces $1/a > 1$ y por lo recién demostrado, $\lim_{n \to \infty} (\frac{1}{a})^{b_n} = (\frac{1}{a})^b$.

Luego, por Proposición 3.10:

$$\lim_{n \to \infty} a^{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(1/a)^{b_n}} = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} (1/a)^{b_n}} =$$

$$= \frac{1}{(1/a)^b} = a^b$$

lo cual termina de probar el lema. ///

Ahora si podemos probar nuestro resultado final:

PROPOSICION 3.26.

Sea $(a_n)_{n \geqslant 1}$ una sucesión de términos *positivos* con límite $a > 0$ y sea $(b_n)_{n \geqslant 1}$ una sucesión con límite b. Entonces

$$\lim_{n \to \infty} a_n^{b_n} = a^b$$

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración: Por ejercicio 2 c) del parágrafo anterior:

$$a_n^{b_n} = e^{\ln a_n^{b_n}} = e^{b_n\,.\,\ln a_n}$$

Llamando $c_n = b_n\,.\,\ln a_n$ resulta, por 3.9 y 3.23:

$$\lim_{n \to \infty} c_n = \lim_{n \to \infty} b_n\,.\,\lim_{n \to \infty} \ln a_n = b\,.\,\ln a$$

Entonces, por el lema Provisorio 3.25:

$$\lim_{n \to \infty} e^{b_n\,.\,\ln a_n} = e^{b.\ln a} = e^{\ln a^b} =$$

$$= a^b$$

o sea:

$$\lim_{n \to \infty} a_n^{b_n} = a^b$$

que era lo que queríamos demostrar. ///

EJERCICIOS

1

Calcular los límites de las sucesiones dadas por:

★a) $a_n = \left(\frac{2n^2+3n-1}{3n^2-6n+1}\right)^{2n}$;

★b) $\left(\frac{3n+4}{2n+5}\right)^{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$;

★c) $\frac{\ln n}{n}$

2

Probar que si $a > 0$, entonces:

$\lim_{n \to \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$ (Usar ejercicio 2j. de 3.6)

3

Probar que si $a_n > 0$ para todo $n \in N$ y $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \ln a_n = -\infty$$

4

Probar que si $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$, *entonces* $\lim_{n \to \infty} \ln a_n = +\infty$

5

Probar que si $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$ y $\lim_{n \to \infty} b_n = b > 0$, entonces $\lim_{n \to \infty} a_n^{b_n} = +\infty$

6

Probar que si $\lim_{n \to \infty} a_n = a > 1$ *y* $\lim_{n \to \infty} b_n = +\infty$, *entonces* $\lim_{n \to \infty} a_n^{b_n} = +\infty$

3.9. TEOREMAS DE ENCAJE DE INTERVALOS Y DE BOLZANO-WEIERSTRASS

Vamos a demostrar un teorema del cual haremos repetido uso en el resto del libro. Primero daremos una definición:

DEFINICION 3.27.

Un *encaje de intervalos* es una sucesión de intervalos cerrados $I_n = [a_n, b_n]$ con $a_n \leqslant b_n$ tal que

$$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$$

o sea tal que se verifican las siguientes condiciones:

i) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \ldots$

ii) $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \ldots$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Llamaremos *longitud* del intervalo $[a_n, b_n]$ al número $b_n - a_n$

TEOREMA 3.28.

(DE ENCAJE DE INTERVALOS)

Sea $(I_n)_{n \geqslant 1}$ un encaje de intervalos tal que la longitud de I_n tiende a cero cuando $n \to \infty$

Existe entonces un único $x \in \mathbb{R}$ que pertenece a todos esos intervalos:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$$

Demostración: Ya sabemos que $a_n \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por definición de encaje de intervalos. Probamos algo más: dados $k, j \in \mathbb{N}$, entonces es

$$a_k \leqslant b_j$$

Para ello sea n un natural cualquiera mayor que k y que j. Entonces es $a_k \leqslant a_n$ por la condición i), $a_n \leqslant b_n$ según dijimos y $b_n \leqslant b_j$ por la condición ii). Por transitividad resulta $a_k \leqslant b_j$ cualesquiera sean k y j en $\mathbb{N}$.

De esta manera, la sucesión $(a_n)_{n \geqslant 1}$ está acotada superiormente por cualquier b_j; por ejemplo, por b_1. Como la condición i) dice que esta sucesión es creciente, concluimos por Proposición 3.19 que existe

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n$$

Analogamente, la sucesión $(b_n)_{n \geqslant 1}$ está acotada inferiormente por cualquier a_k; por ejemplo por a_1. Como la condición ii) dice que esta sucesión es decreciente, entonces también por 3.19 existe

$$b = \lim_{n \to \infty} b_n$$

Como $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (mirar la demostración de 3.19), $a \geqslant a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; análogamente como $b = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, $b \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como cada a_k es cota inferior del conjunto de los b_j, entonces $a_k \leqslant b$, ya que b es la *mayor* cota inferior. Pero esta última desigualdad, válida para todo $k \in \mathbb{N}$, dice que b es cota superior del conjunto de los a_k.

Luego $a \leqslant b$, ya que a es la *menor* cota superior. En definitiva resulta:

$$0 \leqslant b - a \leqslant b_n - a \leqslant b_n - a_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Como $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_n - a_n < \epsilon$ para $n \geqslant n_0$. En particular:

$$0 \leqslant b - a \leqslant b_{n_0} - a_{n_0} < \epsilon$$

o sea:

$$0 \leqslant b - a < \epsilon$$

Como esto vale para todo $\epsilon > 0$, entonces (Ejercicio 2.b. del parágrafo 1.9) resulta $b - a = 0$ o sea $a = b$.

Sea entonces $x = a = b$; las desigualdades $a \geqslant a_n$ y $b \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ prueban que $x \in [a_n, b_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o sea:

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

Supongamos que $x' \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Entonces si $x \geqslant x'$ resulta:

$$0 \leqslant x - x' \leqslant b_n - x' \leqslant b_n - a_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$ elegimos n_0 de modo que $b_n - a_n < \epsilon$ para $n \geqslant n_0$ y entonces, en particular:

$$0 \leqslant x - x' \leqslant b_{n_0} - a_{n_0} < \epsilon$$

o sea:

$$0 \leqslant x - x' < \epsilon$$

Como esto vale cualquiera sea $\epsilon > 0$, entonces nuevamente resulta:

$$x = x'.$$

lo cual prueba que la intersección de todos los I_n se reduce a un punto. ///

Para dar la primera aplicación de este teorema, vamos a definir un nuevo concepto. Si tenemos una sucesión $(a_n)_{n \geqslant 1}$, una subsucesión de ella consiste en elegir algunos de los a_n y formar así una nueva sucesión. Más precisamente, una subsucesión de $(a_n)_{n \geqslant 1}$ es una sucesión de la forma:

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$$

de manera que:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k \ldots$$

Así por ejemplo, $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2n}, \ldots$ es una subsucesión, $a_1, a_3, a_5, \ldots a_{2n-1}, \ldots$ es otra.

Si recordamos la Definición 3.1 de sucesión como una función $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, entonces podemos dar una definición más precisa del concepto de subsucesión:

DEFINICION 3.29.

Sea $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sucesión e indiquemos $a_n = a(n)$. Una *subsucesión* de a es la composición

$$a \circ n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

de a con una función *estrictamente creciente* $n: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Indicaremos $n_k = n(k)$ y entonces $a_{n_k} = a_{n(k)} = a \circ n(k)$.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Hemos visto antes (Proposición 3.4) que toda sucesión convergente es acotada. La recíproca de esta Proposición no es cierta, una sucesión acotada puede no ser convergente (Ejemplo: $a_n = (-1)^n$). Pero hay algo importante que podemos decir respecto a la convergencia de las sucesiones acotadas:

TEOREMA 3.30.

(BOLZANO-WEIERSTRASS)

Toda sucesión acotada contiene una subsucesión convergente.

Demostración: Sea $(a_n)_{n \geqslant 1}$ una sucesión acotada. Eso significa que existe un número real $M > 0$ tal que $|a_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o sea:

$$-M \leqslant a_n \leqslant M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Entonces todos los términos de la sucesión están dentro del intervalo cerrado $[-M, M]$. Consideremos el punto medio de $[-M, M]$, o sea el 0, y los dos intervalos cerrados $[-M, 0]$ y $[0, M]$. Entonces ocurre una de estas dos alternativas: o hay infinitos valores de n para los cuales $a_n \in [-M, 0]$ o hay infinitos valores de n para los cuales $a_n \in [0, M]$ (si no fuese así, habría sólo una cantidad finita de valores de n para los cuales $a_n \in [-M, M]$, contra lo supuesto).

En el primer caso, llamemos I_1 a $[-M, 0]$ y en el segundo llamemos $I_1 = [0, M]$; si se dan las dos alternativas (por ejemplo, si la sucesión original fuese $(-1)^n/n$), entonces elegimos el intervalo de la izquierda; $I_1 = [-M, 0]$. Sea cual sea, llamemos $I_1 = [b_1, c_1]$.

Ahora repetimos el procedimiento con I_1: consideremos el punto medio de I_1, o sea $\dfrac{b_1 + c_1}{2}$, y los dos intervalos cerrados $[b_1, \dfrac{b_1 + c_1}{2}]$ y $[\dfrac{b_1 + c_1}{2}, c_1]$. Entonces ocurre una de estas dos alternativas: o hay infinitos valores de n para los cuales $a_n \in [b_1, \dfrac{b_1 + c_1}{2}]$ o hay infinitos valores de n para los cuales $a_n \in [\dfrac{b_1 + c_1}{2}, c_1]$ (si no fuese así, habría sólo una cantidad finita de valores de n para los cuales $a_n \in [b_1, c_1] = I_1$, contra la forma en que hemos elegido I_1).

En el primer caso llamamos I_2 a $[b_1, \dfrac{b_1 + c_1}{2}]$ y en el segundo llamemos I_2 a $[\dfrac{b_1 + c_1}{2}, c_1]$; si se dan las dos alternativas, entonces elegimos el intervalo de la izquierda, $I_2 = [b_1, \dfrac{b_1 + c_1}{2}]$. Sea cual sea, llamemos $I_2 = [b_2, c_2]$.

Entonces por construcción resulta $[-M, M] \supset I_1 \supset I_2$ y además la longitud de I_1 es M y la de I_2 es $M/2$.

Si reiteramos este procedimiento (dividiendo I_2 por el punto medio, etc.), obtendremos una sucesión de intervalos cerrados $I_n = [b_n, c_n]$ tales que

$$[-M, M] \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$$

y tales que la longitud de I_n es $M/2^{n-1}$. Como M es fijo, entonces la longitud de I_n tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Entonces la sucesión $(I_n)_{n \geq 1}$ es un encaje de intervalos que está en las condiciones en las cuales vale el Teorema 3.28. Luego existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que:

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

Este x nos va a dar el límite buscado, pero todavía falta elegir la subsucesión. Para ello hacemos lo siguiente: como hay infinitos valores de n para los cuales $a_n \in I_1$, elegimos uno cualquiera de ellos y lo indicamos n_1 (por ejemplo, elegimos n_1, como el menor n tal que $a_n \in I_1$). Entonces es $a_{n_1} \in I_1$.

Ahora bien, como hay infinitos valores de n para los cuales $a_n \in I_2$, entonces seguramente hay valores de n mayores que n_1 que verifican $a_n \in I_2$. Elegimos uno cualquiera de ellos y lo indicamos n_2 (por ejemplo, elegimos n_2 como el menor n que verifica las condiciones $a_n \in I_2$ y $n_1 < n$). Entonces es $a_{n_2} \in I_2$ y $n_1 < n_2$.

Reiterando el procedimiento (como hay infinitos valores de n para los cuales $a_n \in I_3$, etc.), obtenemos una sucesión $n_1 < n_2 < n_3 \ldots < n_k < \ldots$ de números naturales (y por lo tanto una subsucesión $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k} \ldots$ de la original) de manera que $a_{n_k} \in I_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Afirmamos que es:

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = x$$

Para probarlo, dado $\epsilon > 0$ sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, $c_n - b_n < \epsilon$ (recordar que $c_n - b_n = M/2^{n-1} \to 0$). Entonces si $k \geq n_0$ resulta:

$$a_{n_k} - x \leqslant c_k - x \leqslant c_k - b_k < \epsilon$$

(ya que $a_{n_k} \in [b_k, c_k]$ por construcción y x pertenece a todos los $[b_n, c_n]$, en particular $x \in [b_k, c_k]$) y además

$$a_{n_k} - x \geqslant b_k - x \geqslant b_k - c_k > -\epsilon$$

o sea, en definitiva: $-\epsilon < a_{n_k} - x < \epsilon$ para $k \geq n_0$, es decir:

$$|a_{n_k} - x| < \epsilon \quad \text{para } k \geqslant n_0$$

lo cual prueba la afirmación hecha. ///

OBSERVACIONES

★1 Los "etc" que aparecen en la demostración del Teorema de Bolzano-Weierstrass pueden hacer pensar al lector que debe haber un razonamiento inductivo escondido detrás de ellos. En efecto, así ocurre: la definición de ***todos*** los I_n debe hacerse por inducción (supuesto definido I_n, partimos por el punto medio y nos quedamos con aquél que contenga términos a_n para infinitos valores de n, llamándolo I_{n+1}) y lo propio ocurre con la definición de los n_k. De ahora en adelante nos permitiremos estos "etc" en la confianza de que el lector ha captado la idea de que es fácil transformarlos en un razonamiento inductivo pero que ya no vale la pena hacerlo (porque ya le debe resultar automático hacerlo; no era así en el Capítulo 1).

★2 En el parágrafo 1.8 hemos hablado sobre la representación de $\mathbb{R}$ en la recta y, aunque mencionamos la ayuda que puede prestar, pusimos el énfasis en el hecho de que dicha representación no iba a ser usada en ninguna demostración. Hasta ahora hemos cumplido, pero queremos trasladar el énfasis. La demostración hecha del Teorema de Bolzano-Weie strass sólo se basa, en última instancia, en las propi dades básicas de los números reales listadas en el Cap tulo 1. Pero el lector puede darse cuenta de que par comprender dicha demostración estuvo todo el tien po pensando en los números reales como en los pu tos de una recta, y la imagen que le quedó de la ide central de la demostración es totalmente geométrica.

Ya se empieza a ver, entonces, que el papel auxiliar d los dibujos no es un "mero" papel auxiliar. De esto s convencerá definitivamente en los próximos capítulos

EJERCICIOS

1

Si $b_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3}$ y $c_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + \ldots}{n^3}$

e $I_n = [b_n, c_n]$, probar que $(I_n)_{n \geq 1}$ es un encaje d intervalos cuyas longitudes tienden a cero. Hallar la intersección de todos ellos.

2

● *a) Dar un ejemplo de un encaje de intervalos tal que la intersección de todos ellos contenga más de un punto.*

● *b) Probar que la intersección de todos los intervalos cerrados de un encaje de intervalos cualquiera es un intervalo cerrado (copiarse la demostración de 3.28 para determinar* a *y* b*; el intervalo en cuestión es* $[a, b]$*)*

● *c) Dar un ejemplo de una sucesión* $(I_n)_{n \geq 1}$ *de intervalos abiertos tales que* $I_{n+1} \subset I_n$ *y que* $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$

3

Utilizando el Teorema de encaje de intervalos como hipótesis, probar la Propiedad de Completitud (A acotado superiormente, $A \neq \phi \Rightarrow$ existe el supremo de A).

3.10.

SUCESIONES DE CAUCHY

ntes de entrar en tema, probamos un resultado sobre subsucesiones

PROPOSICION 3.31.

Una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ es convergente con límite a si y sólo si toda subsucesión de $(a_n)_{n \geq 1}$ es convergente con límite a.

Demostración: Supongamos primero que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ y sea $(a_{n_k})_{k \geq 1}$ una subsucesión de $(a_n)_{n \geq 1}$. Dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que:

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \text{para } n \geq n_0 \qquad (1)$$

Pero $n_k \geq k$ para todo $k \in N$ (lo menos que puede valer n_1 es 1; como $n_1 < n_2$, lo menos que puede valer n_2 es 2, etc.) Luego si $k \geq n_0$ entonces $n_k \geq k \geq$ $\geq n_0$ y por (1):

$$|a_{n_k} - a| < \epsilon \quad \text{para } k \geq n_0$$

lo cual prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$,

La recíproca es trivial ya que toda sucesión es subsucesión de sí misma (corresponde al caso $n_k = k$) ///

Para definir sucesión convergente, lo que hicimos fue poner en términos precisos la idea de que la sucesión se vaya acercando a un cierto número. Ahora ponemos en términos precisos la siguiente idea: que los términos de la sucesión se vayan acercando entre sí. Lo hacemos de esta manera:

DEFINICION 3.32.

Una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ se dice que es de *Cauchy* si tiene la siguiente propiedad:

Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in N$ tal que, si $n \geq$ $\geq n_0$ y $m \geq n_0$:

$$|a_n - a_m| < \epsilon$$

Es natural pensar que si los términos de una sucesión se van acercando a un cierto número, entonces dichos términos se van acercando entre sí (o sea, toda sucesión convergente es de Cauchy). También es natural pensar que si los términos de una sucesión se están acercando entre sí, entonces todos ellos se deben estar acercando a algún número (o sea, toda sucesión de Cauchy es convergente). La demostración de estas dos afirmaciones será el final de este parágrafo y de este Capítulo. Previamente necesitamos un par de resultados.

PROPOSICION 3.33.

Toda sucesión de Cauchy es acotada

Demostración: Consideremos $\epsilon = 1$; por 3.32, si $(a_n)_{n \geq 1}$ es de Cauchy, existe $n_0 \in N$ tal que, para $n, m \geq n_0$:

$$|a_n - a_m| < 1$$

En particular debe ser, para $n \geq n_0$

$$|a_n - a_{n_0}| < 1$$

o sea:

$$a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1$$

Si ahora consideramos $m' = \min(a_1, a_2, \ldots, a_{n_0 - 1})$, $M' = \max(a_1, a_2, \ldots, a_{n_0 - 1})$ y $m = \min(m', a_{n_0} - 1)$, $M = \max(M', a_{n_0} + 1)$

entonces claramente resulta

$$m \leq a_n \leq M \text{ para todo } n \in N \text{ ///}$$

PROPOSICION 3.34.

Supongamos que $(a_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy y que existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k \geq 1}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Demostración: Dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que, para $n, m \geq n_0$:

$$|a_n - a_m| < \epsilon/2$$

y existe n_0' tal que, para $k \geq n_0'$:

$$|a_{n_k} - a| < \epsilon/2$$

Entonces para $n \geq n_0$:

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq$$
$$\leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \text{(tomando } k \geq \geq n_0')$$
$$< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

lo cual prueba lo afirmado. ///

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado anunciado:

TEOREMA 3.35.

Una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy.

Demostración: Supongamos primero que $(a_n)_{n \geq 1}$ es convergente con límite a. Entonces dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in N$ tal que, para $n \geq n_0$:

$$|a_n - a| < \epsilon/2$$

Entonces, si $n, m \geq n_0$:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| =$$
$$= |a_n - a| + |a_m - a| < \epsilon/2 + \epsilon/2 =$$
$$= \epsilon$$

lo cual prueba que la sucesión dada es de Cauchy.

Supongamos ahora que $(a_n)_{n \geq 1}$ es de Cauchy. Entonces por Proposición 3.33. dicha sucesión es acotada; ahora, por el Teorema 3.30 de Bolzano-Weierstrass, esta sucesión debe contener una subsucesión $(a_{n_k})_{k \geq 1}$ convergente. Pero entonces la Proposición 3.34 nos dice que $(a_n)_{n \geq 1}$ es convergente. ///

EJERCICIOS

1

Probar que una sucesión es de Cauchy si y solo si dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in N$ tal que para $n \geq n_0$:

$$|a_{n+p} - a_n| < \epsilon \text{ cualquiera sea } p \in N$$

2

★ *a) Probar que si una sucesión es de Cauchy, entonces para todo* $p \in N$ *es*

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$$

★ *b) Mostrar que la recíproca de a) no es cierta (considerar* $a_n = \ln n$*)*

★ *c) Meditar sobre la diferencia entre a) y el Ejercicio 1.*

3

Demostrar que la sucesión dada por $a_n = (-1)^n$ no es convergente.

CAPITULO IV

Series

Numéricas

4.1.

DEFINICION DE SERIE

Consideremos una sucesión cualquiera $(a_n)_{n \geq 1}$. Para cada $n \in N$, sabemos lo que quiere decir la suma de los n primeros términos de esa sucesión, suma que indicábamos como $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, o también como $\sum_{k=1}^{n} a_k$, y además conocemos algunas propiedades de esas sumas (parágrafo 1.4).

Lo que queremos hacer en este capítulo es dar una definición, si se puede, de lo que es la suma de *todos* los infinitos términos de dicha sucesión, suma que indicaremos $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, o también $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

En el parágrafo 1.4 tuvimos que argumentar bastante para mostrar la necesidad de *definir* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ para todo $n \in N$; aquí no hace falta argumentar mucho para convencer al lector de la necesidad de *definir* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, ya que nadie puede efectuar infinitas sumas. En busca de esa definición, consideremos las siguientes "sumas parciales":

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$\vdots$$

Si estuviese definido $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, entonces es razonable esperar que las sumas parciales recién indicadas se le vayan acercando. Pero eso es lo mismo que pedir que la sucesión $(S_n)_{n \geq 1}$ tenga límite, lo que en general no ocurre. Por ejemplo, consideremos la sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ dada por $a_n = (-1)^{n+1}$. Para esta sucesión, las sumas parciales son:

$$S_1 = a_1 = 1$$
$$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + (-1) = 0$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + (-1) + 1 = 1$$

y, en general, $S_n = 1$ si n es impar y $S_n = 0$ si n es par. Luego la sucesión de sumas parciales es:

$$1, 0, 1, 0, \ldots$$

claramente no convergente. Luego no parece posible dar una definición de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ para *cualquier* sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ (no parece posible definir $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$). Esto nos lleva derecho a la siguiente definición:

DEFINICION 4.1.

Si $(a_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión, si, para cada $n \in \mathbb{N}$, llamamos $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, y si la sucesión $(S_n)_{n \geq 1}$ es convergente, entonces llamamos *suma de los* a_k *desde* $k = 1$ *hasta* ∞ *a:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} S_n$$

(o sea, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$)

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Brevemente, entonces, la suma de infinitos números reales es el límite de las sumas parciales, si dicho límite existe. Pero exista o no ese límite, vamos a encontrar de importancia el estudio de las sucesiones de sumas parciales correspondientes a una sucesión dada $(a_n)_{n \geq 1}$.

La expresión "sucesión de sumas parciales correspondientes a una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$" es un poco larga como para estar usándola continuamente (y deberemos hacerlo). Esto ha originado una abreviatura para esa expresión bastante singular: en lugar de decir "la sucesión de sumas parciales correspondientes a la sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$" se dice "la *serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$".

De esta manera, aunque no exista $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (en el sentido de la Definición 4.1), siempre existe la *serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (por ejemplo, no existe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$, pero sí existe la *serie* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$: es la sucesión $1, 0, 1, 0, \ldots$ de sumas parciales). Más aún, aunque exista $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, no es lo mismo que la *serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (pues $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es un *número*, el límite de una cierta sucesión, mientras que la *serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es esa cierta sucesión).

De acuerdo a lo anterior, está claro qué quiere decir que una serie sea *convergente*; como la serie, por definición, es una sucesión (la de sumas parciales), entonces eso querrá decir que dicha sucesión es convergente.

El núcleo de este capítulo estará en la determinación de criterios que nos permitan decidir si una serie

converge o no. Empezamos probando lo siguiente:

PROPOSICION 4.2.

Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración: Que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converja quiere decir que la sucesión $(S_n)_{n \geq 1}$ de sumas parciales converge. Luego, por Teorema 3.35, $(S_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy. Pero entonces, por el Ejercicio 3 del parágrafo 3.10, es:

$$\lim_{n \to \infty} (S_{n+1} - S_n) = 0$$

y como $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n+1}$, la Proposición queda probada ///

Desafortunadamente, la recíproca de la Proposición 4.2. *no* es cierta, *no* es cierto que si $a_n \to 0$ entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. (Ver ejemplo al final del parágrafo 4.2, la "serie armónica")

Ya estamos en condiciones de examinar un ejemplo muy importante, la llamada *serie geométrica de razón* r. Esta es la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} \quad \text{(también indicada } \sum_{k=0}^{\infty} r^k \text{)}$$

donde r es un número real cualquiera. Veamos cuál es su comportamiento según cuál sea el valor de r.

Observemos que la sucesión de sumas parciales tiene, en este caso, una expresión muy sencilla. Por el Ejercicio 5.b del parágrafo 1.4 sabemos que es, si $r \neq 1$:

$$S_n = 1 + r + r^2 \ldots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

(si no lo hizo antes, hágalo ahora por inducción). Luego existe $\lim_{n \to \infty} S_n$ si y sólo si existe $\lim_{n \to \infty} \frac{r^n - 1}{r - 1}$. Pero como aquí aparece r^n, recordamos lo hecho en el parágrafo 3.4: si $|r| < 1$, entonces $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$. Por lo tanto, si $|r| < 1$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{0 - 1}{r - 1} = \frac{1}{1 - r}$$

Esto prueba que, si $|r| < 1$, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ converge, y además podemos decir a *qué* número converge:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1 - r} \quad \text{(para } |r| < 1\text{)}$$

Afirmamos que la serie geométrica no converge para ningún otro valor de r. En efecto, si convergiese, entonces por la Proposición 4.2, debería ser $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Pero a_n es en este caso r^{n-1}, y por los resultados del parágrafo 3.4 sabemos que $\lim_{n \to \infty} r^{n-1} = 0$ *solamente cuando* $|r| < 1$. Entonces, en definitiva, la *serie geométrica* $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ *converge* (a $1/(1-r)$) *si* $|r| < 1$ *y no converge si* $|r| \geq 1$.

EJERCICIOS

1

Probar que si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es convergente, entonces para todo número real* c *también converge la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} c.a_k$, *y además:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c.a_k = c.\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$ *(Usar 3.9 y 4.1)*

2

Probar que si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ converge y además:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$ (Usar 3.8 y 4.1)

3

Probar que las siguientes series no *son convergentes:*

• a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$; • b) $\sum_{n=1}^{\infty} n$; • c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+3}{n^2+1}$

• d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ *(Usar 4.2)*

4

Probar que las siguientes series son convergentes y hallar su suma:

⋆ a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$; ⋆ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$;

⋆ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} . 3^{n+2} . 7}{5^{2n-3}}$ (Usar ejercicio 1 y la serie geométrica)

4.2.

SERIES DE TERMINOS POSITIVOS: CRITERIOS DE CONVERGENCIA

Nos limitaremos en este parágrafo a estudiar series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para las cuales sea $a_n \geq 0$ para todo $n \in N$. Observemos que si $a_n \geq 0$ para todo $n \in N$, entonces las sumas parciales son crecientes; en efecto:

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n+1} + S_n \geq$$
$$\geq S_n$$

Luego, por la Proposición 3.19, si la sucesión de sumas parciales está acotada, entonces existe $\lim_{n\to\infty} S_n$, o sea la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge; y si la sucesión de sumas parciales no está acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ (en este caso se dice que la serie *diverge*). Estas observaciones nos suministran inmediatamente un criterio de convergencia:

PROPOSICION 4.3.

(CRITERIO DE COMPARACION)

Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$ dos sucesiones tales que, a partir de un cierto n_0:

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

y supongamos además que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

Demostración: Para cada $n \in N$, llamemos:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$S'_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

Como, por hipótesis, S'_n converge, entonces S'_n está acotada es decir existe un número real $M' > 0$ tal que:

$$S'_n \leq M' \text{ para todo } n \in N$$

Ahora bien, si $n > n_0$ es:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \leq \text{(por hipótesis)}$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k \leq \text{(ya que cada } b_i \geq 0)$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{n_0} a_k + S'_n \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n_0} a_k + M'$$

Llamando $M'' = \sum_{k=1}^{n_0} a_k + M'$, resulta:

$$S_n \leq M'' \text{ para todo } n > n_0$$

y, si $M = \max(S_1, S_2, \ldots, S_{n_0}, M'')$, entonces:

$$S_n \leq M \text{ para todo } n \in N$$

Luego $(S_n)_{n \geq 1}$ está acotada superiormente; siendo creciente, la Proposición 3.19 nos dice que existe $\lim_{n\to\infty} S_n$. Luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge ///

COROLARIO 4.4.

Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ *y* $(b_n)_{n \geq 1}$ *dos sucesiones tales que, a partir de un cierto* n_0:

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

y supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge. Entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *también diverge.*

Demostración: Al ser $b_n \geq 0$ para todo $n \in N$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge o diverge. Si convergiese, entonces también lo haría $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ por la Proposición 4.3. Ello no es así por hipótesis, luego $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge ///

COROLARIO 4.5.

Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ *y* $(b_n)_{n \geq 1}$ *dos sucesiones de términos positivos (o sea,* $a_n > 0, b_n > 0$ *para todo* $n \in N$*) tales que:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = s > 0$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge si y sólo si* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge.*

Demostración: Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = s$, entonces existe $n_0 \in N$ tal que, para $n \geq n_0$:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - s \right| < 1$$

lo cual implica en particular:

$$\frac{a_n}{b_n} - s < 1 \Rightarrow a_n < b_n\ (s+1)$$

Ahora bien, como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\ (s+1)$ también converge (Ejercicio 1 del parágrafo anterior). Y como $0 < a_n < b_n\ (s+1)$ para $n > n_0$, entonces por el Criterio de comparación 4.3. resulta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente.

Si ahora suponemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, como $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1/s > 0$, repetimos los razonamientos anteriores cambiando b por a y s por $1/s$ para concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también es convergente ///

El Corolario 4.5 resulta particularmente útil para eliminar la hojarasca de los términos generales de algunas series. Por ejemplo, consideremos la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3}{3^n + 2}$$

Para n grande, 3 se puede despreciar frente a 2^n y 2 se puede despreciar frente a 3^n. Pensando en eso, consideramos:

$$a_n = \frac{2^n + 3}{3^n + 2}$$

$$b_n = \frac{2^n}{3^n}$$

Entonces:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2^n + 3}{2^n} \cdot \frac{3^n}{3^n + 2} = \left(1 + \frac{3}{2^n}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 + 2/3^n}\right)$$

Como $\frac{3}{2^n}$ y $\frac{2}{3^n}$ tienden a cero cuando $n \to \infty$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 > 0$$

y siendo $b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, por ser geométrica de razón $2/3 < 1$. Luego, por 4.5, resulta que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Veamos ahora un criterio de gran importancia sobre convergencia de series:

PROPOSICION 4.6.

(CRITERIO DE D'ALEMBERT)

Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de términos positivos tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = s$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si $s < 1$ y divergente si $s > 1$.

Demostración: Supongamos primero que $s < 1$ y sea $t \in R$ tal que $s < t < 1$.

Entonces, por Proposición 3.5.b, existe $n_0 \in N$ tal que para $n \geq n_0$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < t$$

Pero entonces valen las siguientes desigualdades:

$$a_{n_0+1} < t \cdot a_{n_0}$$

$$a_{n_0+2} < t \cdot a_{n_0+1} < t \cdot t \cdot a_{n_0} = t^2 \cdot a_{n_0}$$

$$a_{n_0+3} < t \cdot a_{n_0+2} < t \cdot t^2 \cdot a_{n_0} = t^3 \cdot a_{n_0}$$

y, en general:

$$a_{n_0+p} < t^p \cdot a_{n_0} \quad \text{para } p \in N$$

Si $n > n_0$, considerando $p = n - n_0 \in N$ en la desigualdad anterior:

$$a_n < t^{n-n_0} \cdot a_{n_0} =$$

$$= t^n \frac{a_{n_0}}{t^{n_0}}$$

Llamando $c = a_{n_0}/t^{n_0}$, resulta que para $n > n_0$:

$$a_n < t^n \cdot c$$

Como $0 < t < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} t^n \cdot c$ converge (ver Ejercicio 1 del parágrafo anterior). Luego, por el criterio de comparación 4.3, resulta que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Supongamos ahora $s > 1$. Eligiendo $t \in R$ tal que $s > t > 1$ se prueba, igual que antes, que existe $n_0 \in N$ tal que:

$$a_n > t^n \cdot \frac{a_{n_0}}{t^{n_0}} \quad (\text{para } n > n_0)$$

Como $t > 1$, el segundo miembro tiende a $+\infty$ cuando $n \to \infty$. En particular, no puede ser que $a_n \to 0$, de donde, por la Proposición 4.2, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge. Siendo una serie de términos positivos, concluimos entonces que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge ///

Por ejemplo, consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$, o sea $a_n = \frac{1}{n^n}$.

Entonces:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}/n^n} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)\,(n+1)^n/n^n} = \frac{1}{(n+1)\,(1+1/n)^n}$$

Luego $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+1/n)^n} =$ $= 0.\ e = 0 < 1$. En consecuencia la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^n$ converge.

Probamos ahora un último criterio sobre convergencia de series de términos positivos:

PROPOSICION 4.7.

(CRITERIO DE CAUCHY)

Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de términos positivos tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = s$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si $s < 1$ y divergente si $s > 1$.

Demostración: Supongamos primero $s < 1$ y sea $t \in \mathbb{R}$ tal que $s < t < 1$.

Entonces, por Proposición 3.5.b, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$:

$$\sqrt[n]{a_n} < t$$

de donde:

$$a_n < t^n \quad \text{para } n \geqslant n_0$$

Siendo $t < 1$, es $\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ convergente y el Criterio de comparación 4.3 nos dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Si $s > 1$, entonces por Proposición 3.5.a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant n_0$:

$$\sqrt[n]{a_n} > 1$$

luego:

$$a_n > 1^n = 1$$

y, en particular, no puede ser que $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Se sigue de la Proposición 4.2 que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no puede ser convergente. Siendo una serie de términos positivos, resulta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergente ///

El ejemplo que vimos antes, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$, se resuelve más fácil con este criterio. En efecto, aquí es $a_n = \frac{1}{n^n}$, luego $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n} \to 0 < 1$, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ converge.

Antes de pasar a los ejercicios, analicemos la convergencia de la llamada "serie armónica", la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

El siguiente razonamiento informal muestra que esta serie *diverge:*

Es:

$$1+1/2+(1/3+1/4) > 1+1/2+(1/4+1/4) = 1+1/2+1/2$$

y también:

$$1+1/2+(1/3+1/4)+(1/5+1/6+1/7+1/8) >$$
$$> 1+1/2+(1/4+1/4) + (1/8+1/8+1/8+1/8) =$$
$$= 1+1/2+1/2+1/2$$

De la misma manera se prueba que:

$$1+1/2 \ldots + 1/16 > 1+1/2+1/2+1/2+1/2$$

Como el miembro de la derecha tiende a $+\infty$ (pues en cada paso estamos sumando $1/2$ y eso llega a ser tan grande como se quiera), lo propio debe ocurrir con el miembro de la izquierda.

Veamos cómo se convierte esto en un razonamiento formal. Afirmamos que:

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant 1 + n \,.\, 1/2 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

y lo probamos por inducción. Para $n = 1$ vale la igualdad. Si suponemos la desigualdad verdadera para un cierto n, entonces:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geqslant$$

$$\geqslant 1 + n \,.\, 1/2 + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} =$$

$$= 1 + n \,.\, 1/2 + (2^{n+1} - 2^n) \,.\, \frac{1}{2^{n+1}} =$$

$$= 1 + n \,.\, 1/2 + (2 - 1) \,.\, 2^n \,.\, \frac{1}{2^{n+1}} =$$

$$= 1 + n \,.\, 1/2 + 1/2 = 1 + (n+1) \,.\, 1/2$$

lo cual prueba la afirmación hecha. Ahora dado $M > 0$, sea n un número natural tal que $1 + n \,.\, 1/2 > M$ (o sea, tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 2\,(M-1)$)

Entonces para ese n:

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant 1 + n \,.\, 1/2 > M$$

lo cual prueba que la sucesión de sumas parciales no está acotada. Entonces no puede ser convergente y, siendo de términos positivos, es divergente.

Notemos que esta serie nos muestra que *la recíproca de la Proposición 4.2 no es cierta*, pues el término general $1/n$ tiende a cero y, sin embargo, la serie no converge.

Apelando al mismo tipo de acotaciones (ver ejercicio 2 de este parágrafo) se prueba que la "serie armónica generalizada", o sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *es divergente si $p \leqslant 1$ y convergente si $p > 1$.*

Este último hecho muestra, en particular, que *en los criterios de D'Alembert y de Cauchy nada puede decirse si el límite es* 1. Pues si $a_n = \frac{1}{n^p}$, entonces es fácil ver que, cualquiera sea $p \in \mathbb{R}$, tanto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ como $\sqrt[n]{a_n}$ tienden a 1, y mientras que para algunos valores de p la serie diverge (para los $\leqslant 1$), para otros converge (para los > 1)

EJERCICIOS

1

Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *siendo*

- a) $a_n = \frac{3^n}{2^n \,.\, n}$; b) $a_n = \frac{2^n}{n!}$;
- c) $a_n = \frac{2n+1}{5^n}$; d) $a_n = \frac{n}{2n^2 - 1}$;
- e) $a_n = \frac{1}{\ln n}$; f) $a_n = e^{-n}$
- g) $a_n = \frac{(2n+1)^n}{(3n-1)^n}$ h) $a_n = \frac{2^n + n}{5^n}$;
- i) $a_n = \frac{n}{2^n + n^2}$; j) $a_n = \frac{2n!}{n^n}$
- k) $a_n = \frac{n^3}{n!}$; l) $a_n = \frac{(2n+3) \,.\, 3^n}{n!}$
- m) $a_n = \frac{2n}{3n^2 - n + 2}$; n) $a_n = \frac{(5^n + n^2) \,.\, n!}{2^n \,.\, n^n}$

2

★a) Probar, por inducción sobre n, que cualquiera sea $p \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k^p} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(2^{p-1})^k} + \frac{1}{(2^p)^n}$$

(Esto se conjetura a partir de una serie de desigualdades del tipo:

$$1+(1/2^p+1/3^p)+1/4^p \leqslant 1+(1/2^p+1/2^p)+1/4^p$$

$$1+(1/2^p+1/3^p)+(1/4^p+1/5^p+1/6^p+1/7^p)+1/8^p \leqslant$$
$$\leqslant 1+(1/2^p+1/2^p)+(1/4^p+1/4^p+1/4^p+1/4^p)+ 1/8^p$$

y así de seguido)

★ b) Deducir que la serie armónica generalizada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$.

★ c) Usar el Criterio de comparación para ver que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge para $p < 1$ (para $p = 1$ ya lo probamos)

★ c) Usar el procedimiento de a) para probar que si $(a_n)_{n \geqslant 1}$ es una sucesión decreciente y si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n . a_{2^n}$ también es convergente (a_{2^n} significa a_k con $k = 2^n$).

3

Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, siendo:

▲a) $a_n = \frac{n+3}{2n^3-1}$; ▲b) $a_n = \frac{n^2+\sqrt{n}}{2n^4-1}$;

▲c) $a_n = \frac{7n^2+3}{3n^2-7}$

4

Probar que si $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ para todo $n \in N$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

4.3.

SERIES ALTERNADAS: CONVERGENCIA ABSOLUTA

Una serie se dice que es *alternada* si es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ con los $a_n \geqslant 0$ (o sea, $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} . (-1)^{n\ 1}$. Daremos un único criterio para series de este tipo:

PROPOSICION 4.8.

(CRITERIO DE LEIBNIZ)

Si una sucesión $(a_n)_{n \geqslant 1}$ verifica:

i) $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in N$

ii) $a_{n+1} \leqslant a_n$ para todo $n \in N$

iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

entonces la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge.

Demostración: Para estudiar la sucesión $(S_n)_{n \geqslant 1}$ de sumas parciales, consideremos las dos siguientes subsucesiones de ella: $(S_{2n})_{n \geqslant 1}$ y $(S_{2n-1})_{n \geqslant 1}$ (o sea la subsucesión $S_2, S_4, S_6, \ldots$ de los términos de subíndice par y la subsucesión $S_1, S_3, S_5, \ldots$, de los términos de subíndice impar).

Afirmamos que la sucesión $(S_{2n})_{n \geqslant 1}$ es *creciente;* para probarlo, observemos que;

$$S_{2(n+1)} = S_{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k+1} . a_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} . a_k + (-1)^{2n+2} . a_{2n+1} + $$
$$+ (-1)^{2n+3} . a_{2n+2} =$$
$$= S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqslant$$
$$\geqslant S_{2n}$$

Análogamente probamos que la sucesión $(S_{2n-1})_{n \geqslant 1}$ es *decreciente:*

$$S_{2(n+1)-1} = S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} a_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} a_k + (-1)^{2n+1} a_{2n} +$$
$$+ (-1)^{2n+2} a_{2n+1} =$$
$$= S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} =$$
$$= S_{2n-1} + (a_{2n+1} - a_{2n}) \leqslant$$
$$\leqslant S_{2n-1}$$

ya que por ii) es $a_{2n+1} \leqslant a_{2n}$, luego $a_{2n+1} - a_{2n} \leqslant 0$.

Más aún, todo término de la sucesión $(S_{2n})_{n \geqslant 1}$ es menor o igual que todo término de la sucesión $(S_{2n-1})_{n \geqslant 1}$. Para probarlo, tomemos un término S_{2k} de la primera y un término S_{2h-1} de la segunda. Sea $n \in N$ tal que $n > k$ y $n > h$.

Entonces por lo que vimos recién:

$$S_{2k} \leqslant S_{2n} \leqslant S_{2n-1} \leqslant S_{2h-1}$$

(la desigualdad $S_{2n} \leqslant S_{2n-1}$ vale porque $S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n}$ y $a_{2n} \geqslant 0$)

En definitiva, tenemos la siguiente situación:

$$S_2 \leqslant S_4 \leqslant S_6 \leqslant \ldots \leqslant S_{2n} \leqslant \ldots \leqslant S_{2n-1} \leqslant \ldots \leqslant$$
$$\leqslant S_5 \leqslant S_3 \leqslant S_1 \qquad (1)$$

Esto implica que $(S_{2n})_{n \geqslant 1}$ está acotada superiormente (por ejemplo por S_1) y que $(S_{2n-1})_{n \geqslant 1}$ está acotada inferiormente (por ejemplo, por S_2). Como $(S_{2n})_{n \geqslant 1}$ es creciente y $(S_{2n-1})_{n \geqslant 1}$ es decreciente, entonces existen:

$$b = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$$

$$c = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}$$

y además por (1) es $b \leqslant c$. Pero entonces:

$$0 \leqslant c - b = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} - \lim_{n\to\infty} S_{2n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} (S_{2n-1} - S_{2n}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0 \quad \text{por iii)}$$

Entonces $b = c$, o sea $(S_{2n})_{n \geqslant 1}$ y $(S_{2n-1})_{n \geqslant 1}$ tienen el mismo límite. Con esto es fácil probar que $\lim_{n\to\infty} S_n = b$. En efecto, como $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = b$, dado $\epsilon > 0$ existe n_0' tal que, si $n \geqslant n_0'$, $|S_{2n} - b| < \epsilon$, y como $\lim S_{2n-1} = c = b$, entonces existe n_0'' tal que si $n \geqslant n_0''$, $|S_{2n-1} - b| < \epsilon$. Sea ahora $n_0 = \max(2n_0', 2n_0'' - 1)$.

Entonces si $n \geqslant n_0$ resulta:

$$|S_n - b| < \epsilon$$

ya sea que n sea par o impar ///

Como ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (o sea, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$) es convergente, ya que aquí es $a_n = \frac{1}{n}$, que claramente cumple i) ii) y iii).

Vamos ahora a definir un concepto que utilizaremos en un capítulo posterior. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie cualquiera, no necesariamente de términos positivos ni alternada. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente* si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

PROPOSICION 4.9.

Toda serie absolutamente convergente es convergente.

Demostración: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie absolutamente convergente. Eso significa que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, luego la sucesión $(S_n)_{n\geq 1}$ de sumas parciales:

$$S_n = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

es convergente. Por Teorema 3.35, $(S_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy. Entonces dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in N$ tal que si $n, m \geq n_0$:

$$|S_n - S_m| < \epsilon$$

Sea $S'_n = a_1 a_2 + \ldots + a_n$; entonces, si $n > m$:

$$\epsilon > |S_n - S_m| = ||a_1| + \ldots + |a_n| - |a_1| - \ldots - |a_m|| =$$

$$= ||a_{m+1}| + \ldots + |a_n|| =$$

$$= |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| \geq$$

$$\geq |a_{m+1} \ldots + a_n| =$$

$$= |S'_n - S'_m|$$

luego también $|S'_n - S'_m| < \epsilon$ si $n, m \geq n_0$ (si fuese $n < m$ se razona igual). Entonces $(S'_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy y, nuevamente por el Teorema 3.35, es convergente. Pero eso significa que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente ///

La recíproca de esta Proposición *no* es cierta: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge según 4.8. pero no converge absolutamente (pues la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|$ es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (la armónica), divergente según hemos visto).

EJERCICIOS

1

Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, siendo:

• a) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$; • b) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$

• c) $a_n = (-1)^n \frac{n^2-2n-1}{n!}$;

• d) $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$

2

★ a) Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesion que satisface las hipótesis del Criterio de Leibiniz. Probar que para todo $k \in N$ es:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n - \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} a_n \right| < a_k$$

★ b) Verificar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{6}$ es convergente y calcular su suma con error menor que 10^{-3}

4.4. DESARROLLOS DECIMALES

Quizás al lector le habrá llamado la atención que hasta ahora no han aparecido las familiares expresiones decimales de los números reales, es decir expresiones del tipo 0,3178 ó 2,36 ó 1,4142. . . La discusión que sigue podrá hacerle entender porque hemos esperado hasta este punto para presentarlas.

¿Qué significa, por ejemplo, 0,3178? Es sencillamente el número real $\frac{3.178}{10.000}$, o sea $\frac{3.178}{10^4}$. Pero entonces:

$$0{,}3178 = \frac{3.178}{10^4} = \frac{3.000 + 100 + 70 + 8}{10^4} =$$

$$= \frac{3.000}{10^4} + \frac{100}{10^4} + \frac{70}{10^4} + \frac{8}{10^4} =$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{8}{10^4}$$

Análogamente será:

$$2{,}26185 = 2 + \frac{2}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{5}{10^5}$$

¿Cuál será entonces el significado de $2{,}\widehat{36}$, o sea de 2,363636. . .?

Pensando en los dos ejemplos anteriores, uno podría imaginar que debería ser:

$$2{,}\widehat{36} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \frac{6}{10^6} + \ldots$$

Pero el miembro de la derecha tiene todo el aspecto de ser una serie; entonces se ve que cualquier tratamiento riguroso de la notación decimal debe hacerse a través del concepto de serie, que a su vez es un concepto de límite de sucesiones. En otras palabras, la noción de límite debe suprimirla (desde un punto de vista didáctico) a la notación decimal. Dicha noción ha sido lógico, no necesariamente desde un punto de vista didáctico) a la notación decimal. Dicha noción ha sido a esta altura, desarrollada con detalle, así que podemos abocarnos al estudio de las expresiones o desarrollos decimales.

Comenzamos probando una sencilla propiedad:

PROPOSICION 4.10.

Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números *enteros* tal que $0 \leq a_n \leq 9$ para todo $n \in N$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ es convergente y su suma es un número real x que verifica $0 \leq x \leq 1$.

Demostración: Sea, para cada $n \in N$, $b_n = \frac{1}{10^{n-1}}$. Entonces:

$$0 \leq \frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n} < \frac{10}{10^n} = \frac{1}{10^{n-1}} = b_n$$

para todo $n \in N$. Además la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n-1}}$ es convergente (es geométrica de razón $r = 1/10 < 1$). Lue-

go, por el criterio de comparación 4.3, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ es convergente.

Sea $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$; como $0 \leqslant a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces seguramente será $x \geqslant 0$. Y siendo $a_n \leqslant 9$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9. \sum_{n=1}^{\infty} (1/10)^n$$

$$= 9 . \frac{1/10}{1-1/10} = 9 . \frac{1/10}{9/10} =$$

$$= 1$$

lo cual prueba la afirmación hecha ///

El número x definido por la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ (con $0 \leqslant a_n \leqslant 9$ para $n \in \mathbb{N}$ y $a_n \in \mathbb{Z}$) se indicará en la forma:

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

y, en el caso particular en que sea $a_k = 0$ para $k > n$, indicamos:

$$x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n$$

(De esta manera, se puede verificar, por ejemplo, que si $x = 0,\hat{9} = 0,999\ldots$, entonces $x = 1$; pues $0,\hat{9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 1$ y, análogamente, $0,367\hat{9} = 0,367999\ldots = 0,368$)

Ampliamos la notación decimal de la siguiente manera. Si a_0 es un número *natural* cualquiera y los a_n son como siempre, entonces $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ significa $a_0 + 0, a_1 a_2 a_3 \ldots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$. Es inmediato, a partir de 4.10, que es

$$a_0 \leqslant a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots \leqslant a_0 + 1$$

Respecto a los números negativos, la notación cambia. Por ejemplo, $-3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ se indica como $\bar{3}, a_1 a_2 a_3 \ldots$, y en general, si $a_0 = -n$ con $n \in \mathbb{N}$, la expresión:

$$\bar{n}, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

indica el número real $-n + 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ (Ver ejercicio 1 de este parágrafo)

De esta forma, con expresiones del tipo $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ ó $n, a_1 a_2 a_3 \ldots$ ó $\bar{n}, a_1 a_2 a_3 \ldots$, indicamos una gran variedad de números reales. Tan grande, en realidad, que los abarca a todos. La demostración de esta afirmación comienza con una especie de recíproca de la Proposición 4.10:

PROPOSICION 4.11.

Sea $x \in [0, 1]$; existe entonces una sucesión de números enteros a_n, con $0 \leqslant a_n \leqslant 9$, tales que:

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

o sea:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

Demostración: Recordamos primero un concepto introducido en el capítulo anterior Si $a \in \mathbb{R}$, se llama *parte entera* o *característica* de a al mayor número entero m tal que $m \leqslant a$. Indicando $[a]$ a la parte entera de a, resulta

$$[a] \leqslant a < [a] + 1$$

Así, $[0,3618\ldots] = 0$, $[2,21623,\ldots] = 2$, $[-4,3217\ldots] = -5$, $[6] = 6$, etc.

Pasemos a demostrar la Proposición. Supongamos primero $x \neq 1$, es decir $0 \leqslant x < 1$. Si queremos los a_n de modo que $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, entonces es natural esperar que $10.x = a_1, a_2 a_3 \ldots$; esto nos motiva para definir a_1 de la siguiente forma:

$$a_1 = [10x] \qquad (1)$$

Entonces $a_1 \in \mathbb{Z}$ por definición de parte entera. Además al ser $0 \leqslant x < 1$, es $0 \leqslant 10x < 10$, luego $0 \leqslant [10x] < 10$, o sea $0 \leqslant a_1 < 10$. Como $a_1 \in \mathbb{Z}$, eso implica que $0 \leqslant a_1 \leqslant 9$.

Para definir a_2, observemos que si fuese $10x = a_1, a_2 a_3 \ldots$ entonces es natural esperar que $10x - a_1 = 0, a_2 a_3 \ldots$ y por tanto que $10(10x - a_1) = a_2, a_3 a_4 \ldots$; esto nos motiva para definir a_2 de la siguiente manera:

$$a_2 = [10^2 x - 10 a_1]$$

Para definir a_3, observemos que si fuese $10^2 x - 10 a_1 = a_2, a_3 a_4 \ldots$, entonces sería $10^2 x - 10 a_1 - a_2 = 0, a_3 a_4 a_5 \ldots$, luego sería $10^3 x - 10^2 a_1 - 10 a_2 = a_3, a_4 a_5 a_6 \ldots$; esto nos motiva para definir a^3 de la siguiente manera:

$$a_3 = [10^3 x - 10^2 a_1 - 10 a_2]$$

Ya se ve como será la situación general. Supuesto que hemos definido $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, definimos a_n de la siguiente manera:

$$a_n = [10^n x - (10^{n-1} a_1 + 10^{n-2} a_2 + \ldots + 10 a_{n-1})] \qquad (2)$$

Con (1) y (2) tenemos definidos, inductivamente, los a_n buscados. Fuera de (1) y (2), el resto fue pura charla. Tenemos que probar ahora tres cosas:

★ i) $a_n \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

★ ii) $0 \leqslant a_n \leqslant 9$ para todo $n \in \mathbb{N}$

★ iii) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$

La propiedad i) es evidente por definición de parte entera. Para la propiedad ii), notemos que siendo $[a] \leqslant a < [a] + 1$ para todo $a \in \mathbb{R}$, entonces considerando $n-1$ en lugar de n en (2) resulta:

$$a_{n-1} \leqslant 10^{n-1} x - (10^{n-2} a_1 + 10^{n-3} a_2 + \ldots + 10 a_{n-2}) < a_{n-1} + 1$$

y por lo tanto:

$$10 a_{n-1} \leqslant 10^n x - (10^{n-1} a_1 + 10^{n-2} a_2 + \ldots + 10^2 a_{n-2}) < 10 a_{n-1} + 10$$

de donde, restando $10 a_{n-1}$:

$$0 \leqslant 10^n x - (10^{n-1} a_1 + 10^{n-2} a_2 + \ldots + 10^2 a_{n-2} + 10 a_{n-1}) < 10 \qquad (3)$$

o sea, por (2):

$$0 \leqslant a_n < 10$$

lo cual lleva a $0 \leqslant a_n \leqslant 9$ teniendo en cuenta que $a_n \in \mathbb{Z}$.

Para probar iii) observamos que dividiendo en (3) por 10^n resulta:

$$0 \leqslant x - \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}\right) < \frac{1}{10^{n-1}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Considerando $n+1$ en lugar de n en la desigualdad anterior:

$$0 \leqslant x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} < \frac{1}{10^n}$$

y como $1/10^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces es:

$$\lim_{n \to \infty} \left(x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}\right) = 0$$

o sea:

$$x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

Para terminar de probar la Proposición, recordamos que todo lo anterior valía para $x \neq 1$. Pero $1 = 0,\hat{9} = 0,999\ldots$ con lo cual vale la afirmación hecha para todo $x \in [0, 1]$ ///

Si ahora x es un número real cualquiera, sea $a_0 = [x]$; entonces $a_0 \leqslant x < a_0 + 1$, luego $0 \leqslant x - a_0 < 1$. Por la Proposición 4.11 existirá una sucesión de enteros $(a_n)_{n \geqslant 1}$ con $0 \leqslant a_n \leqslant 9$ para todo $n \in N$ tal que:

$$x - a_0 = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

de donde:

$$x = a_0 + 0, a_1 a_2 a_3$$

En definitiva, toda expresión decimal corresponde a un único numero real y todo número real tiene su expresión decimal. Para terminar de esclarecer la relación entre números reales y expresiones o desarrollos decimales, tenemos que enfrentar un problema que ya se nos ha planteado en un ejemplo: el número real 1 tiene dos desarrollos decimales, $1 = 1,000\ldots$, y también $1 = 0,\hat{9} = 0,999\ldots$ No es el único caso: el número real $\dfrac{368}{10^3}$ tiene los dos desarrollos decimales $0,368000\ldots$, y $0,367\hat{9} = 0,367999\ldots$ Estos son, en realidad, los únicos casos que se presentan, es decir, son todos de ese tipo, como lo muestra la siguiente Proposición:

PROPOSICION 4.12.

Sea x un número real y supongamos que existen sucesiones *distintas* $(a_n)_{n \geqslant 1}$ y $(b_n)_{n \geqslant 1}$ de números enteros entre 0 y 9, y números enteros a_0 y b_0 tales que:

$$x = a_0 + 0, a_1 a_2 a_3 \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

$$x = b_0 + 0, b_1 b_2 b_3 \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}$$

Al ser distintas, existirá un $n \in Z$, $n \geqslant 0$, tal que $a_k = b_k$ para $k < n$ y $a_n \neq b_n$. Entonces será, si $a_n < b_n$:

$$\begin{cases} a_{n+p} = 9 \text{ para todo } p \in N \\ b_{n+p} = 0 \text{ para todo } p \in N \\ b_n = a_n + 1 \end{cases}$$

Demostración: Al tener el mismo número esas dos expresiones, entonces:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}$$

de donde:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k - a_k}{10^k} = 0$$

Teniendo en cuenta que $a_k = b_k$ para $k < n$, entonces los primeros términos de la igualdad anterior son cero. Luego:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k - a_k}{10^k} = 0$$

lo cual se puede poner en la forma:

$$\frac{b_n - a_n}{10^n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k - b_k}{10^k} \qquad (*)$$

Como $a_n < b_n$, entonces $0 < b_n - a_n$, luego $1 \leqslant b_n - a_n$ (ya que b_n y a_n son números enteros). Entonces $\dfrac{1}{10^n} \leqslant \dfrac{b_n - a_n}{10^n}$. Pero siendo $a_k \leqslant 9$ y $b_k \geqslant 0$, entonces $a_k - b_k \leqslant 9$. Luego:

$$\frac{1}{10^n} \leqslant \frac{b_n - a_n}{10^n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k - b_k}{10^k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{9}{10^k} =$$

$$= \frac{9}{10^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{9}{10^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - 1/10} =$$

$$= \frac{9}{10^{n+1}} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{10^n}$$

En definitiva:

$$\frac{1}{10^n} \leqslant \frac{b_n - a_n}{10^n} \leqslant \frac{1}{10^n}$$

de donde se deduce que $\dfrac{b_n - a_n}{10^n} = \dfrac{1}{10^n}$, o sea $b_n - a_n = 1$. Esto prueba que $b_n = a_n + 1$, que es una de las afirmaciones de esta Proposición.

Para probar las otras, observemos que de (*) y de $b_n = a_n + 1$ obtenemos:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k - b_k}{10^k} = \frac{1}{10^n} \qquad (**)$$

Afirmamos que entonces $a_k - b_k = 9$ para todo $k \geqslant n + 1$.

En efecto, si no fuese así sería $a_k - b_k < 9$ para algún $k \geqslant n + 1$ (y siempre $a_k - b_k \leqslant 9$ para los demás). Luego sería (ver ejercicio 2 de este parágrafo):

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k - b_k}{10^k} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^n}$$

según el cálculo que hemos hecho antes. Esto contradice (**), luego debe ser $a_k - b_k = 9$ para todo $k \geqslant n + 1$.

Pero siendo $0 \leqslant a_k \leqslant 9$ y $0 \leqslant b_k \leqslant 9$, esto implica inmediatamente que:

$$a_k = 9 \text{ para todo } k \geqslant n + 1$$

$$b_k = 0 \text{ para todo } k \geqslant n + 1$$

lo cual termina de probar la Proposición ///

Las Proposiciones 4.10, 4.11 y 4.12 nos permiten sacar las siguientes conclusiones: a toda sucesión $(a_n)_{n \geqslant 0}$ de números enteros tal que $0 \leqslant a_n \leqslant 9$ para todo $n \in N$ le corresponde un único número real $x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{10^n}$ y a todo número real x le corresponden a lo sumo dos sucesiones de ese tipo que verifiquen la antedicha igualdad. Más aún, si:

$A = \{(a_n)_{n \geqslant 0} : a_n \in Z, 0 \leqslant a_n \leqslant 9$ para $n \in N$ y no existe $k \in N$ tal que $a_n = 9$ para todo $n \geqslant k\}$

$B = \{(a_n)_{n \geqslant 0} : a_n \in Z, 0 \leqslant a_n \leqslant 9$ para $n \in N$ y no existe $k \in N$ tal que $a_n = 0$ para todo $n \geqslant k\}$

entonces las correspondencias:

$$A \to R$$
$$B \to R$$

definidas por:

$$(a_n)_{n \geqslant 0} \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

son biyectivas (la inyectividad de ambas es consecuencia de 4.12).

EJERCICIOS

1

▲ a) Sea $(a_n)_{n \geqslant 1}$ una sucesión de números enteros tal que $0 \leqslant a_n \leqslant 9$ para todo $n \in N$. Probar que:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9 - a_n}{10^n}\right) - 1$$

♦ b) Si $k \in \mathbb{N}$ y si $(a_n)_{n \geq 1}$ es como en a), probar que,

$$-k, a_1 a_2 a_3 \ldots = \overline{k+1}, b_1 b_2 b_3 \ldots$$

donde $b_n = 9 - a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Usar a))

2

Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$ sucesiones acotadas tales que $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a_k < b_k$ para un cierto $k \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}$$

(SUGERENCIA: si S_n y S'_n son las respectivas sumas parciales, entonces $S'_n - S_n > b_k - a_k > 0$ para todo $n \geq k$)

3

♦ a) Probar que:

$$0{,}36\widehat{785} = \frac{36.785 - 36}{99900}$$

♦ b) Siguiendo el razonamiento que se haya hecho para probar a), probar que:

$$0, a_1 a_2 \ldots a_n \widehat{a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{n+p}} = \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+p} - a_1 a_2 \ldots a_n}{(10^p - 1) \cdot 10^n}$$

♦ c) Deducir que si un número real tiene desarrollo decimal periódico, entonces ese número es racional.

♦ d) Justificar el procedimiento usual para dividir dos números naturales n y m con tantas cifras decimales como se quiera (Mirar la demostración de 4.11)

♦ e) Probar que el desarrollo decimal de todo número racional es periódico (Usar d), el Teorema 1.16 y el consiguiente hecho de que los restos se tienen que empezar a repetir; guiarse por el ejemplo 1[7).

♦ f) Concluir que un número real tiene desarrollo decimal periódico si y sólo si es un número racional.

4

Sea $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ con $(a_n)_{n \geq 1} \in A$. Probar que

$$0 \leq x - \sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{10^n} < \frac{1}{10^k} \text{ para } k \in \mathbb{N}$$

Deducir que si se considera $x \doteq 0, a_1 a_2 \ldots a_k$, el error que se comete es menor que 10^{-k} (considerar x igual a ese número se dice que es tomar x con k cifras decimales "exactas")

5

A partir del ejercicio 2 y de la biyección de A en R indicada en el texto, probar la Propiedad de Completitud (A acotado superiormente, $A \neq \emptyset$, entonces A tiene supremo). Sugerencia: mostrar como se determinan las cifras decimales del supremo)

6

Sean a y b números reales mayores que cero. Mirando las demostraciones de las Proposiciones 3.8, 3.9 y 3.10, deducir cuántas cifras decimales exactas de a y de b basta tomar para que, al calcular $a + b$, $a \cdot b$ y a/b, el error cometido sea menor que 10^{-n}.

7

Sea $\pi = 3{,}141592\ldots$ ¿Cuántas cifras decimales hay que tomar de π para que el error cometido al calcular 2^{π} sea menor que 10^{-5} (Sugerencia: $a^{1/k} - 1 \leq \frac{a-1}{k}$ para $k \in \mathbb{N}$ y $a > 0$ por 1.12).

CAPITULO V

Geometría Analítica Plana

1. Rectas en el plano.
2. Rectas paralelas y perpendiculares; distancias.
3. Las cónicas: elipse, hipérbola y parábola.
4. Forma general de las cónicas.
5. Coordenadas polares; ecuación polar de las cónicas.

En este capítulo vamos a tratar de explotar, en otra forma que lo hecho hasta ahora, la representación de $\mathbb{R}^2$ en el plano indicada en el Capítulo 2. Recordemos en que consistía esa representación: si sobre el plano trazamos dos rectas perpendiculares entre sí, digamos una recta horizontal (eje de absisas) y una recta vertical (eje de ordenadas), y si fijamos en cada una de estas rectas la misma escala (la misma forma de representar a $\mathbb{R}$), entonces un par ordenado (x, y) de $\mathbb{R}^2$

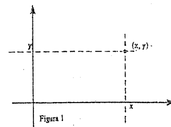


Figura 1

se representa en el plano por el punto intersección de dos rectas: la vertical que pasa por el punto que representa a x en el eje de abscisas y la horizontal que pasa por el punto que representa a y en el eje de ordenadas. De dicho punto se dice que tiene *coordenadas* x e y, o también, por abuso de lenguaje, que tiene coordenadas (x, y).

Recíprocamente, cualquier punto del plano representa a algún par ordenado (x, y) de $\mathbb{R}^2$ como se ve proyectando dicho punto sobre el eje de abscisas (para obtener x) y sobre el eje de ordenadas (para obtener y).

En términos de funciones, podríamos decir que esta representación, que asigna a cada par ordenado de números reales un punto del plano y recíprocamente, es una *función biyectiva* (biyección) entre $\mathbb{R}^2$ y el plano.

Recalquemos que este hecho, la existencia de una biyección entre $\mathbb{R}^2$ y el plano, **no** se puede demos-

trar a partir de las propiedades básicas de los números reales listadas en el Capítulo 1, ya que dichas propiedades no mencionan ningún plano ni, en general, ningún objeto geométrico (rectas, circunferencias, etc.). Por ello, esa biyección ha jugado hasta ahora sólo un papel auxiliar para ilustrar nuestros razonamientos y no ha formado parte de ninguna demostración.

En este Capítulo vamos a hacer un alto en la demostración de propiedades de los números reales y vamos a invertir nuestro punto de vista: en lugar de utilizar la biyección entre R^2 y el plano como ilustración (en el plano) de los razonamientos que hagamos (en R^2), vamos a utilizarla para hacer razonamientos (en el plano) sobre las figuras que allí aparezcan viendo como se traducen analíticamente (en R^2) esas figuras y usando allí las propiedades de los números reales que ya conozcamos.

Esta forma de trabajar con el plano es lo que se llama *Geometría Analítica* (Plana): es Geometría porque estudia entes geométricos (rectas, circunferencias, etc) y es Analítica porque usa para ello elementos del Análisis (números reales, funciones y, según veremos en capítulos posteriores, límites, etc.).

Si no se entiende bien el significado del párrafo anterior, sugerimos estudiar los dos próximos parágragos y volver a leerlo, con lo cual quedará perfectamente claro (más aun si se relee luego de terminar de estudiar el capítulo completo). Ahora entremos en tema.

5.1. RECTAS EN EL PLANO

Vimos en el Capítulo 2, parágrafo 2.2, que si $f: R \to R$ es una función lineal, es decir si existen números reales m y b, con $m \neq 0$, tales que $f(x) = mx + b$ para todo $x \in R$, entonces su gráfico, es decir el conjunto:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in R^2 : y = mx + b\} \qquad (*)$$

queda representado en el plano por una recta.

También en el caso en que sea $m = 0$, es decir cuando f es la función constantemente igual a b, $f(x) = b$ para todo $x \in R$, su representación gráfica es una recta (horizontal) (el gráfico de esta función es el conjunto $[(x, y) \in R^2 : y = b])$

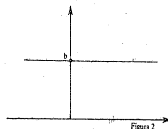


Figura 2

Nos planteamos ahora la cuestión recíproca: ¿será toda recta del plano la representación gráfica de una función lineal o una función constante? La respuesta es no: si consideramos cualquier recta vertical, entonces dicha recta no puede ser la representación gráfica de una función lineal ni de ninguna otra función (ya que, en ese caso, a un mismo x le corresponderían infinitos valores de y). Consideremos entonces una recta no vertical L cualquiera y sean (x_0, y_0), (x_1, y_1) las coordenadas de dos puntos cualesquiera de esa recta. Al ser ésta no vertical, será $x_0 \neq x_1$.

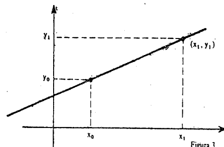


Figura 3

Queremos conseguir una función lineal o constante cuyo gráfico contenga a los pares ordenados (x_0, y_0) y (x_1, y_1). Si la función buscada es $f(x) = mx + b$, entonces que (x_0, y_0) pertenezca al gráfico de f significa que vale la igualdad:

$$y_0 = m x_0 + b \qquad (1)$$

Análogamente, que (x_1, y_1) pertenezca al gráfico de f significa que vale la igualdad:

$$y_1 = m x_1 + b \qquad (2)$$

Restando (1) de (2) obtenemos:

$$y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0)$$

de donde, siendo $x_1 \neq x_0$:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Una vez averiguado m, reemplazamos ese valor en (1) o en (2) para obtener b.

Reemplazando en (1) resulta:

$$b = y_0 - m x_0 = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot x_0$$

Teniendo m y b, tenemos la función buscada; ésta es:

$$f(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\, x + y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot x_0 \qquad (3)$$

Observemos que esta es una función lineal (si $y_1 \neq y_0$) o constante (si $y_1 = y_0$) y que (x_0, y_0) y (x_1, y_1) están en su gráfico (o sea, si reemplazamos x por x_0 en (3) resulta $f(x_0) = y_0$, y si reemplazamos x por x_1 resulta $f(x_1) = y_1$). Luego la representación gráfica de la función lineal o constante dada por (3) es una recta (ya lo sabíamos) que pasa por los puntos de coordenadas (x_0, y_0) y (x_1, y_1). Como una recta queda determinada por dos puntos, entonces dicha representación gráfica *es* la recta L.

Esto resuelve por la afirmativa nuestra cuestión; toda recta no vertical es la representación gráfica de una función lineal o constante, y por lo tanto es la representación en el plano de un conjunto del tipo (*) Se suele decir, y adoptaremos esa costumbre de ahora en adelante, que esa recta es "la recta de ecuación $y = mx + b$".

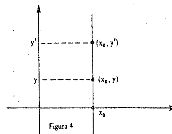


Figura 4

Para completar, consideremos ahora el caso de las rectas verticales. Si L es una recta vertical cualquiera, ésta cortará al eje de abscisas en un punto que corresponderá a un número real x_0. Entonces los puntos de la recta son los que tienen coordenadas (x_0, y), donde y puede tomar cualquier valor. En otras palabras, esa recta vertical es la representación en el plano del conjunto:

$$[(x, y) \in R^2 : x = x_0]$$

y es costumbre, que seguiremos, hablar de esta recta como de "la recta de ecuación $x = x_0$".

De acuerdo a lo que hemos visto, entonces, toda recta del plano tiene ecuación $y = m x + b$ (para ciertos $m, b \in \mathbb{R}$) o ecuación $x = x_0$ (para cierto $x_0 \in \mathbb{R}$). ¿Existe una forma común a ambas ecuaciones? Para responder a esta pregunta, observemos que la igualdad $y = m x + b$ se puede escribir como:

$$m x + (-1) y + b = 0 \qquad (4)$$

y que la igualdad $x = x_0$ se puede escribir como:

$$1 . x + 0 . y - x_0 = 0 \qquad (5)$$

y que (4) y (5) tienen una forma en común. Esta:

$$Ax + By + C = 0$$

La recíproca no es cierta; no todo conjunto del tipo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Ax + By + C = 0\}$ tiene como representación en el plano a una recta. Por ejemplo, el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0x + 0y + 0 = 0\}$ es todo $\mathbb{R}^2$ y su representación en el plano es el plano mismo; y el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0x + 0y + 2 = 0\}$ es el conjunto vacío, que no se puede representar en el plano de ninguna manera. En ambos ejemplos es $A = B = 0$; si no es así, es decir, si es $A \neq 0$ o si es $B \neq 0$, entonces efectivamente la representación de $[(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Ax + By + C = 0]$ en el plano es una recta. Pues si $B \neq 0$, la igualdad $Ax + By + C = 0$ equivale a la igualdad:

$$y = -\frac{A}{B} x - \frac{C}{B} = m x + b$$

(con $m = -A/B$, $b = -C/B$) y su representación en el plano es una recta no vertical; y si $B = 0$ y $A \neq 0$, entonces la igualdad $Ax + 0y + C = 0$ equivale a la igualdad

$$x = -\frac{C}{A} = x_0$$

(con $x_0 = -C/A$), cuya representación en el plano es una recta vertical.

Observando que la condición $A \neq 0$ o $B \neq 0$ se puede poner en la forma $A^2 + B^2 \neq 0$, obtenemos el siguiente resultado:

> Todo conjunto de la forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Ax + By + C = 0\}$, con $A^2 + B^2 \neq 0$, queda representado en el plano por una recta y, recíprocamente, toda recta del plano es la representación en el plano de un conjunto de esa forma.

En otras palabras, la *ecuación general de las rectas en el plano* es

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \quad (A^2 + B^2 \neq 0) \qquad (6)$$

De todas maneras, aunque la ecuación general de las rectas en el plano es (6), es más cómodo en general trabajar con la ecuación $y = m x + b$ para las rectas no verticales y con la ecuación $x = x_0$ para las rectas verticales.

Hay un problema que ya tenemos resuelto con lo que hemos hecho y es el de encontrar la recta que pasa por dos puntos determinados. En efecto, si (x_0, y_0) y (x_1, y_1) son las coordenadas de esos dos puntos, entonces, si $x_0 \neq x_1$, deducimos de (3) que la ecuación de la recta buscada es $y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0$ lo cual se puede poner en la forma $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$, y, si $x_0 = x_1$, su ecuación es claramente $x = x_0$.

En definitiva tenemos:

Ecuación de la recta por los puntos de coordenadas (x_0, y_0) y (x_1, y_1):

$$\begin{cases} y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) & \text{si } x_0 \neq x_1 \\ x = x_0 & \text{si } x_0 = x_1 \end{cases}$$

El resultado (6) es útil para encontrar intersecciones de rectas. Si L_1 es la recta de ecuación $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ y L_2 es la recta de ecuación $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, entonces los puntos de coordenadas (x, y) de $L_1 \cap L_2$ deben satisfacer las dos igualdades. En otras palabras, son los puntos cuyas coordenadas satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, si L_1 es la recta de ecuación $x - y + 2 = 0$ y L_2 es la recta de ecuación $x + y + 1 = 0$, entonces hay que encontrar los pares (x, y) que verifican:

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

Sumando las igualdades se obtiene inmediatamente $x = -\frac{3}{2}$; reemplazando este valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones se obtiene $y = \frac{1}{2}$. Luego $L_1 \cap L_2$ consiste de un único punto de coordenadas $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

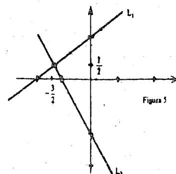


Figura 5

Cuándo las rectas se cortan y cuándo no, será uno de los temas del próximo parágrafo.

EJERCICIOS

1

Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por los puntos de coordenadas

- ★ *a)* $(1, 3)$ *y* $(2, 5)$
- ★ *b)* $(2, 1)$ *y* $(3, -1)$
- ★ *c)* $(2, 3)$ *y* $(2, 4)$
- ★ *d)* $(3, 1)$ *y* $(-2, 1)$

Pasar cada una de esas ecuaciones a la forma general (6).

2

- a) Sean L_1 la recta de ecuación $y = m_1 + b_1$, y L_2 la recta de ecuación $y = m_2 x + b_2$. Mostrar que $L_1 = L_2$ si y sólo si $m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2$.
- b) Sean L_1 la recta de ecuación $y = mx$ b, y L_2 la recta de ecuación $x = x_0$. Mostrar que $L_1 \neq L_2$.
- c) Sean L_1 la recta de ecuación $x = x_0$, y L_2 la recta de ecuación $x = x'_0$. Mostrar que $L_1 = L_2$ y sólo si $x_0 = x'_0$.

● d) Sean L_1 la recta de ecuación $A_1x + B_2y + C_1 = 0$, y L_2 la recta de ecuación $A_2x + B_2y + C = 0$. Mostrar que $L_1 = L_2$ si y sólo si existe un número real $r \neq 0$ tal que

$$A_2 = r A_1,\ B_2 = r B_1,\ C_2 = r C_1$$

(o sea, si y sólo si los coeficientes son proporcionales).

3

Hallar las coordenadas de los puntos de $L_1 \cap L_2$, siendo L_1 y L_2 las siguientes rectas:

♦ a) $\begin{cases} L_1: 2x + y - 1 = 0 \\ L_2: x - y + 3 = 5 \end{cases}$

♦ b) $\begin{cases} L_1: y = 3x + 2 \\ L_2: x = 1 \end{cases}$

♦ c) $\begin{cases} L_1: y = -x + 3 \\ L_2: 3x + y = 2 \end{cases}$

♦ d) $\begin{cases} L_1: 2x - 3y + 2 = 0 \\ L_2: x = -3 \end{cases}$

4

▲ *a) Hallar la ecuación de la recta que corta al eje de abscisas en* $x = 3$, *y al eje de ordenadas en* $y = 1$.

▲ *b) Mostrar que la recta que corta al eje de abscisas en* $x = a$ *y al eje de ordenadas en* $y = b$ *tiene ecuación* $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

5

Mostrar que la ecuación general de las rectas no verticales que pasan por (x_0, y_0) es:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

★ a) Mostrar que los puntos de coordenadas (3, 2), (2, 1) y (4, 3) son colineales (es decir, pertenecen a una misma recta).

★ b) Mostrar que los puntos de coordenadas (2, 5), (3, 1) y (1, 3) no son colineales.

5.2.

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES; DISTANCIAS

Recordemos que dos rectas distintas L_1 y L_2 del plano se dicen *paralelas*, y se escribe $L_1 // L_2$, si no se cortan, es decir si $L_1 \cap L_2 = \phi$. Veamos cómo se traduce analíticamente, es decir en términos de sus ecuaciones, la condición de paralelismo.

Supongamos primero que L_1 y L_2 son no verticales; tendrán entonces ecuaciones $y = m_1x + b_1$, $y = m_2x + b_2$ respectivamente. Afirmamos que si $m_1 \neq m_2$, entonces L_1 y L_2 se cortan. En efecto, planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ y = m_2 x + b_2 \end{cases} \qquad (7)$$

de donde obtenemos, restando:

$$0 = (m_1 - m_2)x + b_1 - b_2 \qquad (8)$$

Como estamos suponiendo $m_1 \neq m_2$, entonces podemos despejar:

$$x = \frac{b_2 - b_2}{m_1 - m_2} \qquad (9)$$

Teniendo el valor de x, obtenemos el valor de y de cualquiera de las dos ecuaciones de (7); por ejemplo, de la primera

$$y = m_1 \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} + b_1 \qquad (10)$$

Es inmediata la verificación de que el par ordenado (x, y), donde x viene dado por (9) e y por (10), satisface las ecuaciones de (7). Pero eso significa que el punto de coordenadas (x, y) pertenece a las dos rectas. Luego L_1 y L_2 se cortan (en un punto) y no pueden ser paralelas.

¿Qué ocurre si $m_1 = m_2$? Si $b_1 = b_2$, entonces las rectas son iguales, $L_1 = L_2$; si $b_1 \neq b_2$, entonces las rectas no se cortan. En efecto, si se cortasen habría un par ordenado (x, y) (las coordenadas de un punto donde se corten) que satisfacería las dos igualdades de (7). Pero entonces también valdría (8) lo que, en el caso $m_1 = m_2$ y $b_1 \neq b_2$ que estamos considerando, no puede ocurrir (pues en (8) quedaría $0 = 0.x + b_1 - b_2 = b_1 - b_2$, luego $b_1 = b_2$). Adoptando la convención de que toda recta es paralela a sí misma, entonces lo que probamos recién es que, si $m_1 = m_2$, L_1 es paralela a L_2. Resumimos esta afirmación y lo que probamos antes en el siguiente enunciado:

> Si L_1 tiene ecuación $y = m_1x + b_2$ y L_2 tiene ecuación $y = m_2x + b_2$ entonces $L_1 // L_2$ si y sólo si $m_1 = m_2$.

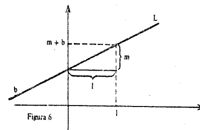


Figura 6

Este resultado no es extraño si uno piensa en lo q
significa m geométricamente. Si una recta L tiene ecu
ción $y = m x + b$ con $m \geqslant 0$, entonces los puntos
coordenadas $(0, b)$ y $(1, m + b)$ pertenecen a la rect

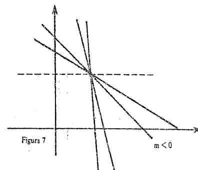


Figura 7

Eso significa que cu ndo la variable x se incremen
en 1, la variable y se incrementó en m (que es la di
rencia entre b y $m + b$). Por lo tanto, cuanto may
sea m, más parada estará la recta (para $m = 0$ es ho
zontal). Si $m < 0$, entonces la recta resultará inclir
da hacia abajo, y tanto más cuanto más grande

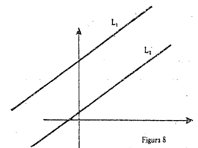


Figura 8

$| m |$. En definitiva, m mide la *inclinación* de la re
(a m se la llama *pendiente* de la recta). Como la id
geométrica de rectas paralelas en el plano es la de re
tas igualmente inclinadas, se comprende que la con
ción necesaria y suficiente para el paralelismo de d
rectas sea la igualdad de sus pendientes.

Supongamos ahora que L_1 y L_2 son verticales y sean $x = x_0$ y $x = x_0'$ respectivamente sus ecuaciones. Entonces, si $x_0 = x_0'$ es $L_1 = L_2$ y si $x_0 \neq x_0'$ es $L_1 \cap \cap L_2 = \phi$ (si hubiese un punto en $L_1 \cap L_2$, sus coordenadas (x, y) deberían satisfacer las igualdades $x = x_0$ y $x = x_0'$, lo cual no puede suceder). En definitiva:

Dos rectas verticales son siempre paralelas.

Por último, supongamos que una recta es vertical, digamos L_1, y la otra no. Entonces L_1 tendrá ecuación $x = x_0$, y L_2 tendrá ecuación $y = m\,x + b$. Afirmamos que L_1 y L_2 se cortan; en efecto, el punto de coordenadas $(x_0, m\,x_0 + b)$ pertenece a las dos rectas. En definitiva:

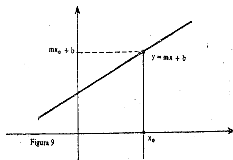


Figura 9

Una recta vertical y una no vertical nunca son paralelas.

Pasemos ahora a estudiar la perpendicularidad de rectas. Como está claro, a través de la discusión anterior, que lo único que importa al respecto es la inclinación relativa de las rectas, nos limitaremos a estudiar el caso de rectas L_1 de ecuación $y = m\,x$, y L_2 de ecuación $y = m'\,x$. Observando la figura, es fácil convencerse de que si una pendiente es positiva, la otra debe ser negativa. Supongamos entonces $m > 0$ y

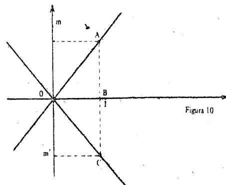


Figura 10

$m' < 0$. Los triángulos $\overset{\triangle}{OAB}$ y $\overset{\triangle}{OBC}$ tienen los dos un ángulo recto ($A\hat{B}O$ y $O\hat{B}C$ respectivamente). Además los ángulos $A\hat{O}B$ y $B\hat{O}C$ son complementarios (por ser las rectas perpendiculares), así como los ángulos $A\hat{O}B$ y $O\hat{A}B$ (pues ellos dos junto con el ángulo recto $O\hat{B}A$ deben sumar dos rectos como siempre ocurre con los ángulos internos de un triángulo). Luego debe ser $B\hat{O}C = O\hat{A}B$. Análogamente resulta $B\hat{C}O = A\hat{O}B$ y entonces los triángulos son semejantes (por tener sus ángulos respectivamente iguales). Luego hay proporcionalidad de los lados y, en particular:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{OB}{BC}$$

Como $AB = m$, $OB = 1$ y $BC = -m'$, resulta inmediatamente:

$$m \,.\, m' = -1$$

Indicamos ahora el resultado general:

Dos rectas, L_1 de ecuación $y = m\,x + b$, L_2 de ecuación $y = m'x + b'$ son perpendiculares si y sólo si es $m \,.\, m' = -1$. Una recta horizontal es perpendicular a toda recta vertical (y solamente a ellas) y recíprocamente. (11)

Un problema que resulta ahora de solución muy sencilla es el de encontrar la recta perpendicular a una dada que pase por un punto determinado.

Por ejemplo, supongamos que queremos encontrar la recta L' perpendicular a la recta L de ecuación $y = 2x - 1$ que pasa por el punto de coordenadas $(1, 3)$.

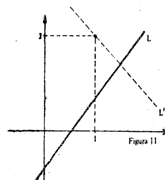


Figura 11

Si es perpendicular a L, deberá ser $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{2}$, o sea la ecuación L' será:

$$y = -\frac{1}{2}x + b \qquad (12)$$

para algún $b \in \mathbb{R}$. Para determinar ese b, observamos que el hecho de que L' pase por el punto de coordenadas $(1, 3)$ se traduce, por (12), en la igualdad:

$$3 = -\frac{1}{2} \,.\, 1 + b$$

luego debe ser $b = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$. En definitiva, L' tiene ecuación:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Por último, consideremos la noción de distancia entre puntos del plano. El haber fijado una escala (la misma) en cada uno de los ejes nos permite *medir* distancias entre puntos del plano. En efecto, si tomamos el segmento que va del $(0, 0)$ al $(1, 0)$ como unidad de medida, entonces el cateto horizontal del triángulo que aparece en la figura mide $x_1 - x_0$. Si el segmento

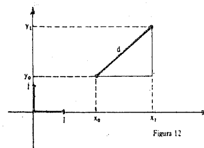


Figura 12

que va del $(0, 0)$ al $(0, 1)$ es igual al que va del $(0, 0)$ al $(1, 0)$ (eso quiere decir que la escala sea la misma en los dos ejes), entonces, en la unidad considerada, el cateto vertical mide $y_1 - y_0$. Luego, por el teorema de Pitágoras, la diagonal del triángulo, siempre respecto a la misma unidad, mide:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \qquad (13)$$

que resulta ser así una medida de la distancia entre los puntos de coordenadas (x_0, y_0) y (x_1, y_1).

Sabiendo cómo medir distancias entre puntos, es fácil medir la distancia entre un punto P y una recta

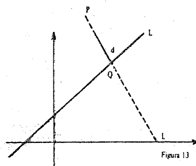


Figura 13

L. Recordemos que ésta se define como la distancia entre P y el pie de la perpendicular a L por P; luego, todo lo que hay que hacer es, dada la ecuación de L, hallar la ecuación de L′, recta perpendicular a L por P, hallar el punto Q intersección de L y L′ y calcular la distancia de P a Q.

Por ejemplo, si L tiene ecuación $y = 2x - 1$ y P tiene coordenadas $(1, 3)$, entonces, según vimos recién, L′ tiene ecuación $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$. La intersección de L y L′ está dada por la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{cases}$$

que resulta ser $x = \frac{9}{5}$, $y = \frac{13}{5}$. Luego Q tiene coordenadas $(\frac{9}{5}, \frac{13}{5})$ y la distancia de P a L está dada por la distancia de P a Q que, por (13), es:

$$d = \sqrt{(\frac{9}{5} - 1)^2 + (\frac{13}{5} - 3)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = 2\frac{\sqrt{5}}{5}$$

EJERCICIOS

1

Para las siguientes rectas L y puntos P, hallar la ecuación de la recta paralela a L que pasa por P.

★ *a)* L: $3x - 2y + 1 = 0$; P: $(1, 2)$

★ *b)* L: $y = 2x + 4$; P: $(-2, 3)$

★ *c)* L: $x = 3$; P: $(1, 5)$

★ *d)* L: $y = 2$; P: $(2, 1)$

2

Mostrar que por un punto exterior a una recta pasa una única paralela a ésta.

3

Sean L_1 la recta de ecuación $A_1x + B_1y + C_1' = 0$ y L_2 la recta de ecuación $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Mostrar que $L_1 \parallel L_2$ si y sólo si existe un número real $r \neq 0$ tal que $A_2 = r A_1$, $B_2 = r B_1$.

4

Calcular la distancia entre los puntos P y Q de coordenadas:

♦ *a)* $(2, 1)$ *y* $(3, 5)$

♦ *b)* $(-3, 1)$ *y* $(2, 3)$

♦ *c)* $(2, 1)$ *y* $(4, 1)$

♦ *d)* $(4, 3)$ *y* $(4, -2)$

5

¿Qué inconveniente surgiría si tomásemos distintas escalas en los ejes y siguiésemos definiendo la distancia entre dos puntos por (1 3)?

6

Si, para puntos P y Q del plano, designamos por d (P, Q) a la distancia entre P y Q definida por (13), mostrar que se cumplen las siguientes propiedades:

● *a)* $d(P, Q) \geq 0$

● *b)* $d(P, Q) = 0$ *si y sólo si* $P = Q$

● *c)* $d(P, Q) = d(Q, P)$

● *d)* $d(P, Q) \leq d(P, T) + d(T, Q)$ ***cualquiera sea el punto T del plano (desigualdad triangular).***

7

Hallar la distancia entre la recta L y el punto P siendo:

▲ a) L: $2x - y + 1 = 0$; P: $(1, 5)$

▲ b) L: $y = 3x - 1$; P: $(0, 3)$

▲ c) L: $x = 2$; P: $(1, 1)$

▲ d) L: $y = 3$; P: $(2, 6)$

8

Partiendo de (11), mostrar que por un punto P exterior a una recta L pasa una única recta L′ perpendicular a L.

9

Si P y Q son puntos del plano, llamamos *punto medio del segmento* PQ a aquel punto T de la recta determinada por P y Q cuya distancia a P es igual a su distancia a Q. Mostrar que si P tiene coordenadas (x_0, y_0) y Q tiene coordenadas (x_1, y_1), entonces T tiene coordenadas $(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2})$.

10

Hallar los puntos P cuyas distancias a la recta de ecuación $4x - 3y + 1 = 0$ *midan* 4.

11

Si P y Q son puntos del plano, se llama *mediatriz* del segmento PQ a la recta perpendicular a la recta L determinada por P y Q que pasa por el punto medio del segmento PQ. Si T es un punto del plano no perteneciente a L, se denomina *mediana* entre P y Q por T a la recta que pasa por T y por el punto medio del segmento PQ.

★ a) Mostrar que las tres mediatrices posibles de formar con P, Q y T son concurrentes (es decir, las tres pasan por un mismo punto; esto es lo mismo que decir que las mediatrices de un triángulo son concurrentes).

★ b) Probar que las tres medianas posibles de formar con P, Q y T son concurrentes.

12

Probar que el conjunto de puntos equidistantes a dos puntos fijos P y Q es la mediatriz del segmento PQ. Deducir que en un triángulo isósceles hay una recta que es mediana y mediatriz.

5.3. LAS CONICAS: ELIPSE, HIPERBOLA Y PARABOLA

Recordemos que se llama *circunferencia* a todo subconjunto del plano que consista de los puntos equidistantes a un punto dado. Por medio de la representación de $\mathbb{R}^2$ en el plano que hemos indicado, resulta fácil encontrar la ecuación de la circunferencia.

Para ello, sea P el punto del cual equidistan los puntos de la circunferencia y sean (x_0, y_0) sus coordenadas. Consideremos un punto cualquiera Q de la circunferencia y sean (x_1, y_1) sus coordenadas. Entonces la distancia de P a Q queda medida por el número

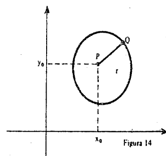


Figura 14

$$r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

que se denomina *radio* de la circunferencia.

De acuerdo a eso, un punto T de coordenadas (x,y) pertenece a la circunferencia dada si y sólo si es:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

o, lo que es lo mismo:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \qquad (14)$$

que resulta ser así la *ecuación de la circunferencia de radio r y centro el punto P de coordenadas* (x_0, y_0).

Estudiemos ahora otra figura geométrica.

Dados dos puntos F_1 y F_2 del plano, se llama *elipse* de focos F_1 y F_2 al conjunto de puntos del plano

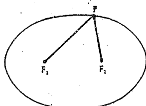


Figura 15

tales que la suma de sus distancias a F_1 y a F_2 es igual a una constante (esta última, mayor que la distancia entre F_1 y F_2, sino no habría puntos en la elipse). Utilizando una representación adecuada de $\mathbb{R}^2$ en el plano, es fácil encontrar la ecuación de la elipse. Utilizamos la siguiente: como eje de ábscisas tomamos la

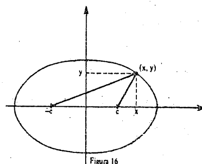


Figura 16

recta que pasa por los puntos F_1 y F_2 con alguna escala, y como eje de ordenadas la recta perpendicular a la anterior que pasa por el punto medio del segmento F_1F_2 con la misma escala.

De esta manera, uno de los puntos, digamos F_2, tendrá coordenadas $(c, 0)$ y el otro, F_1 coordenadas $(-c, 0)$ (con $c > 0$), y la constante a que hace referencia la definición de elipse quedará medida por un cierto número positivo d (entonces será $d > 2c$ = medida de la distancia entre F_1 y F_2).

Veamos cuál es la igualdad que cumplen las coordenadas (x, y) de un punto P de la elipse. La distancia de P a F_1 está dada por:

$$d(P, F_1) = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2},$$

y la distancia de P a F_2 está dada por:

$$d(P, F_2) = \sqrt{(x - (-c))^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

luego las coordenadas (x, y) de P satisfacen la igualdad:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = d$$

Pasando el segundo sumando al segundo miembro y elevando al cuadrado obtenemos

$$(x - c)^2 + y^2 = d^2 - 2d\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2$$

Desarrollando $(x - c)^2$ y $(x + c)^2$ y simplificando, obtenemos:

$$-2xc = d^2 - 2d\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + 2xc,$$

la cual se puede escribir en la forma:

$$2d\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = d^2 + 4xc$$

Elevando nuevamente al cuadrado:

$$4d^2(x + c)^2 + 4d^2y^2 = 16x^2c^2 + d^4 + 8d^2xc,$$

de donde, desarrollando $(x + c)^2$:

$$4d^2x^2 + 8d^2xc + 4d^2c^2 + 4d^2y^2 = 16x^2c^2 + d^4 + 8d^2xc$$

lo cual se puede llevar a la forma:

$$x^2(4d^2 - 16c^2) + y^2 4d^2 = d^2(d^2 - 4c^2)$$

Como es $d > 2c$, entonces $d^2 > 4c^2$. Podemos entonces dividir ambos miembros por $d^2(d^2 - 4c^2)$ para obtener:

$$\frac{4x^2}{d^2} + \frac{4y^2}{d^2 - 4c^2} = 1,$$

y, todavía, llamando:

$$\begin{cases} a = d/2 \\ b = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4c^2} \end{cases} \qquad (16)$$

resulta:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (17)$$

Recíprocamente, desandando los cálculos, es fácil ver que si (x, y) cumple (17) (con a y b dados por (16)), entonces el punto P de coordenadas (x, y) está en la elipse (o sea satisface (15)). Luego (17) (con a y b dados por (16)) es la *ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos de coordenadas* $(c, 0)$ *y* $(-c, 0)$ *y cuya suma de distancias a los focos es igual a* d.

Desde luego, si se hubieran elegido los ejes de distinta manera, entonces la ecuación de la elipse sería distinta (algunos ejemplos se sugieren en los ejercicios).

Es costumbre llamar a la recta que contiene a los focos ***eje focal*** (de acuerdo a como hemos elegido los ejes, el eje focal es, en este caso, el eje de abscisas); las intersecciones de la elipse con el eje focal se denominan ***vértices*** (en nuestro caso son los puntos de coordenadas $(a, 0)$ y $(-a, 0)$).

La circunferencia se puede considerar como un caso particular de la elipse, como la elipse para la cual

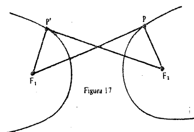


Figura 17

los focos coinciden (pues en ese caso resulta $c = 0$ y entonces $a = b$ con lo cual (17) es la ecuación de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio a).

Pasamos ahora a estudiar otra figura geométrica cuya definición es muy similar a la de la elipse. Dados dos puntos F_1 y F_2 del plano, se llama ***hipérbola*** de focos F_1 y F_2 al conjunto de puntos del plano tales que el módulo de ***la diferencia*** entre sus distancias a F_1 y F_2 es igual a una constante (esta última, menor que la distancia entre F_1 y F_2, sino no habría puntos en la hipérbola).

También en este caso, una representación adecuada de $\mathbf{R}^2$ en el plano facilita la obtención de la ecuación de la hipérbola. Consideramos como eje de abscisas a la recta determinada por los focos F_1 y F_2 con alguna escala, y como eje de ordenadas la recta perpendicular a la anterior que pasa por el punto medio del segmento F_1F_2 con la misma escala. De esta ma-

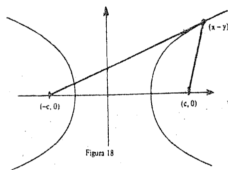


Figura 18

nera, uno de los focos, digamos F_2, tendrá coordenadas $(c, 0)$ y el otro, F_1, coordenadas $(-c, 0)$ (con $c > 0$), y la constante a que hace referencia la definición de hipérbola quedará medida por un cierto número positivo d (entonces será $d < 2c$ = medida de la distancia entre F_1 y F_2).

Igual que en el caso de la elipse, es fácil ver que los puntos de la hipérbola son aquellos cuyas coordenadas (x, y) satisfacen la igualdad:

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = d \quad (18)$$

que equivale a las dos igualdades:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = d$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -d$$

Usando en cada una de estas igualdades el procedimiento seguido para la elipse, es fácil ver (y se deja como ejercicio al lector) que las dos igualdades anteriores equivalen a la (única) igualdad:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (19)$$

donde

$$\begin{cases} a = d/2 \\ b = \dfrac{1}{2}\sqrt{4c^2 - d^2} \end{cases} \quad (20)$$

De esta manera, (19) (con a y b dados por (20)) resulta ser la **ecuación de la hipérbola cuyos focos son los puntos de coordenadas $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, y cuyo valor absoluto de la diferencia de distancias a los focos es igual a d.**

También en este caso, cualquier otra elección de los ejes hubiera llevado la ecuación de la hipérbola a otra forma (más complicada, como podrá verse haciendo los ejercicios). La definición de ***eje focal*** y ***vértices*** es la misma para la hipérbola que para la elipse.

Para terminar con este parágrafo, variamos un poco la situación y, en lugar de considerar dos puntos fijos (los focos), consideramos una recta L y un pun-

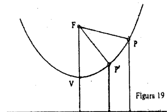


Figura 19

to F no perteneciente a ella. Se llama ***parábola*** de ***foco*** F y ***directriz*** L al conjunto de puntos del plano cuya distancia a F es igual a su distancia a L.

Antes de elegir una representación de $\mathbf{R}^2$ en el plano, llamemos ***vértice*** de la parábola al punto V que está sobre la perpendicular a L que pasa por F y cuya distancia a L es igual a su distancia a F (con lo cual es automáticamente un punto de la parábola). Elegimos ahora nuestros ejes: el eje de abscisas se elige como la paralela a L que pasa por V, y el eje de ordenadas como la perpendicular al eje de abscisas que pasa por V.

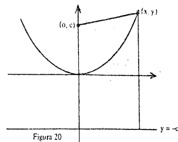


Figura 20

De esta manera, el foco F tendrá coordenadas $(0,c)$ con $c > 0$, el vértice tendrá coordenadas $(0, 0)$ y la directriz tendrá ecuación $y = -c$.

Consideremos un punto P cualquiera de coordenadas (x, y). Su distancia al foco quedará medida por:

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

y su distancia a L por:

$$|y + c|$$

con lo cual la condición para que P esté en la parábola es que sus coordenadas (x, y) satisfagan la igualdad:

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = |y + c|$$

Elevando al cuadrado y simplificando se llega a la siguiente igualdad equivalente:

$$\boxed{y = \frac{x^2}{2c}} \quad (21)$$

que resulta así ser la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto F de coordenadas (0, c) y cuya directriz es la recta L de ecuación $y = -c$.

Mayores conocimientos sobre estos tres tipos de figuras (llamadas *cónicas*) se obtendrán haciendo los siguientes ejercicios:

EJERCICIOS

1

a) *Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos de coordenadas* (1, 1), (2, 2) *y* (2, 3)

b) *Idem para los puntos de coordenadas* (0, 1), (2, 0) *y* (2, 3).

c) *Mostrar que no hay ninguna circunferencia que pase por los puntos de coordenadas* (1, 2), (2, 4) *y* (3, 6).

2

Hallar la ecuación de la circunferencia tal que los puntos de coordenadas (2, 2) y (6, 4) son los extremos de uno de sus diámetros.

3

Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro esta en la recta de ecuación $y = x + 1$ y que pasa por los puntos de coordenadas (1, 3) y (2, 6).

4

Mostrar analíticamente que si A *y* B *son los extremos de un diámetro de una circunferencia y* P *es un tercer punto de la circunferencia, entonces el ángulo* APB *es recto.*

5

Hallar las coordenadas del centro y la medida del radio de la circunferencia de ecuación:

a) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 4 = 0$

b) $4x^2 + 4y^2 + 8x - 4y + 5 = 0$

(SUGERENCIA: completar cuadrados en x y en y).

6

Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por (3, –2) *y por las intersecciones de las circunferencias de ecuaciones:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

7

Hallar la ecuación de la elipse tal que

a) sus vértices son los puntos de coordenadas (5, 0) y (–5, 0) y sus focos son los puntos de coordenadas (4, 0) y (–4, 0).

b) sus focos son los puntos de coordenadas (2, 4) y (3, 6) y que pasa por los puntos de coordenadas (1, 2) y (4, 8)

c) uno de sus focos es el punto de coordenadas (1, 3) y sus vértices son los puntos de coordenadas (2, 6) y (–1, –3).

8

Sean F_1 y F_2 los focos de una elipse y V_1 y V_2 sus vértices. Sean A y B las intersecciones de la recta por F_1 perpendicular al eje focal y C y D las intersecciones de la recta por el punto medio del segmento F_1F_2 perpendicular al eje focal. Mostrar que:

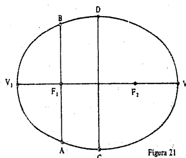


Figura 21

$$\frac{d(V_1, V_2)}{d(C, D)} = \frac{d(C, D)}{d(A, B)}$$

9

Hallar la ecuación de la hipérbola tal que

a) sus focos son los puntos de coordenadas (3, 0) y (–3, 0) y sus vértices son los puntos de coordenadas (2, 0) y (–2, 0).

b) sus focos son los puntos de coordenadas (2, 2) y (–2, –2) y sus vértices son los puntos de coordenadas (1, 1) y (–1, –1).

10

Las rectas de ecuaciones $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ se dicen *asíntotas* de la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Mostrar que una recta corta a la hipérbola en exactamente un punto si y sólo si es paralela (pero distinta) a una de las dos asíntotas.

11

Mostrar que el producto de las distancias de un punto de la hipérbola a sus asíntotas vale lo mismo para todos los puntos de la hipérbola.

12

Se llama *eje* de una parábola a la recta que pasa por el vértice y el foco. Hallar la ecuación de la parábola tal que

a) su eje es el eje de ordenadas, su vértice es el punto de coordenadas (0, 5) y que pasa por el punto de coordenadas (10, –5).

b) su eje es la recta de ecuación $y = 3$, su vértice es el punto de coordenadas (–3, –3) y que pasa por el punto de coordenadas (–6, 3).

13

Hallar la ecuación de la parábola tal que

a) *su directriz es la recta de ecuación* $y = x - 1$ *y su foco es el punto de coordenadas* (2, 3)

b) *su directriz es la recta de ecuación* $y = 2x + 3$ *y su vértice es el punto de coordenadas* (2, 9).

14

Sea L la recta paralela a la directriz de una parábola que pasa por el foco. Si L corta a la parábola en los puntos A y B y si C es la intersección del eje de la parábola con la directriz, probar que el ángulo ACB es recto.

5.4. FORMA GENERAL DE LAS CONICAS

Aunque las definiciones que hemos dado de los diversos tipos de cónicas (elipse, hipérbola y parábola) presentan similitudes, hay diferencias entre ellas. En el caso de la elipse, se pide que la *suma* de las distancias *a dos puntos* fijos sea constante, en el caso de la hipérbola se pide lo mismo para la *diferencia* y

en el caso de la parábola se pide *igualdad* entre la distancia *a un punto y a una recta* fijos. Existe una manera general de definir las cónicas que se ajusta a los tres casos y que vamos a estudiar ahora.

Consideremos en primer término el caso de la elipse. Hemos visto en el parágrafo anterior que si colocamos los ejes de manera que los focos sean los puntos de coordenadas $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, entonces la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (22)$$

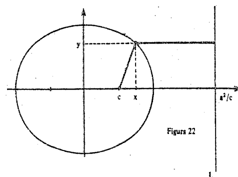


Figura 22

donde $a = d/2$, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (d = valor de la suma de las distancias a los focos).

Sea L la recta de ecuación $x = a^2/c$ y consideremos los puntos del plano que tienen la siguiente propiedad: **su distancia al foco de coordenadas $(c, 0)$ dividida por su distancia a la recta L es constantemente igual a c/a.** En términos de sus coordenadas:

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{a^2/c - x} = \frac{c}{a} \qquad (23)$$

es decir:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{xc}{a}$$

Elevando al cuadrado y desarrollando:

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = a^2 - 2xc + \frac{x^2 c^2}{a^2}$$

de donde:

$$x^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2$$

Notando que $a^2 - c^2 = b^2$, la igualdad anterior se lleva inmediatamente a la forma:

$$\frac{x^2 b^2}{a^2} + y^2 = b^2$$

que, dividiendo por b^2, resulta ser la igualdad (22). Luego, los puntos del plano que cumplen (23), también cumplen (22). Desandando los cálculos, resulta que los puntos del plano que cumplen (22), también cumplen (23). En definitiva, (22) es equivalente a (23) y obtenemos la siguiente conclusión:

> **Dada una elipse, existen un punto F (un foco) y una recta L tales que dicha elipse es exactamente el conjunto de puntos cuya distancia a F dividida por su distancia a L es igual a una constante positiva menor que 1.** (24)

La recta L en cuestión se denomina *directriz* de la elipse y la constante:

$$e = c/a$$

se denomina *excentricidad* de la elipse. (Esta última es menor que 1 cualquiera sea la elipse, pues en la definición de elipse hemos pedido $d > 2c$, o sea $a > c$).

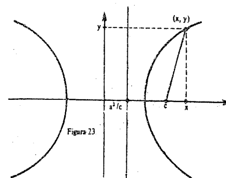


Figura 23

La situación de la hipérbola es totalmente análoga.

Recordemos que colocando los ejes de manera que los focos sean los puntos de coordenadas $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, entonces la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (25)$$

donde $a = d/2$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (d = valor del módulo de la diferencia de las distancias a los polos). Consideremos la recta L de ecuación $x = a^2/c$ y encontremos los puntos del plano que tienen la siguiente propiedad: **su distancia al foco de coordenadas $(c, 0)$ dividida por su distancia a la recta L es constantemente igual a c/a.** En términos de su coordenadas:

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x - a^2/c|} = \frac{c}{a} \qquad (26)$$

Elevando al cuadrado y pasando el denominador al segundo miembro, obtenemos:

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2} x^2 - 2xc + a^2$$

de donde:

$$x^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2$$

o sea:

$$x^2 \, \frac{a^2 - c^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2$$

Como $a^2 - c^2 = -b^2$, dividiendo por $-b^2$ obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Luego, los puntos del plano que cumplen (26), cumplen (25). Desandando los cálculos es fácil ver que los puntos que cumplen (25) cumplen (26). En definitiva (25) es equivalente a (26) y obtenemos la siguiente conclusión:

> **Dada una hipérbola, existen un punto F (un foco) y una recta L tales que dicha hipérbola es exactamente el conjunto de puntos del plano cuya distancia a F dividida por su distancia a L es igual a una constante mayor que 1.** (27)

Al igual que antes, la recta L se llama *directriz* de la hipérbola y la constante:

$$e = c/a$$

se denomina *excentricidad* de la hipérbola (ahora ésta

es *mayor* que 1, pues en la definición de hipérbola hemos pedido $d < 2c$, o sea $a < c$).

Por último, en el caso de la parábola, su definición es evidentemente equivalente a la siguiente: **su distancia a un punto dividida por su distancia a una recta es igual a 1**. Se podría decir, siguiendo la terminología anterior, que su excentricidad es 1.

De esta manera resulta:

Elipses $\leftrightarrow$ cónicas de excentricidad $e < 1$

Hipérbolas $\leftrightarrow$ cónicas de excentricidad $e > 1$

Parábolas $\leftrightarrow$ cónicas de excentricidad $e = 1$

Dicho con más detalle, **las cónicas son los conjuntos del plano con la propiedad de que su distancia a un punto dividida por la distancia a una recta es igual a una constante: esta constante es menor que 1 en el caso de las elipses, mayor que 1 en el caso de las hipérbolas e igual a 1 en el caso de las parábolas.** (28)

(Para un pequeño detalle que falta aquí, ver los ejercicios 3 y 4).

EJERCICIOS

1

Mostrar que (24) sigue siendo cierta si tomamos como F *el punto de coordenadas* $(-c, 0)$ *y como* L *la recta de ecuación* $x = -a^2/c$ *(y como constante* $e = c/a$*).*

2

Mostrar que (27) sigue siendo cierta si tomamos como F el punto de coordenadas $(-c, o)$ y como L la recta de ecuación $x = -a^2/c$ (y como constante $e = c/a$).

3

Probar la recíproca de (24), a saber: si F es un punto cualquiera del plano, L es una recta que no contiene a F y e es un número real positivo *menor que* 1, entonces el conjunto de puntos del plano cuya distancia a F dividida por su distancia a L es igual a e, es una elipse. (SUGERENCIA: elegir los ejes de manera que F tenga coordenadas $(e^2, 0)$ y L tenga ecuación $x = 1$).

4

Probar la recíproca de (27), a saber: si F es un punto cualquiera del plano, L es una recta que no contiene a F y e es un número real *mayor que* 1, entonces el conjunto de puntos del plano cuya distancia a F dividida por su distancia a L es igual a e, es una hipérbola). (SUGERENCIA: la misma que en el ejercicio anterior).

5

Hallar la ecuación de la cónica tal que:

a) su foco es el punto de coordenadas $(2, 0)$, su directriz es la recta de ecuación $x = 4$ y su excentricidad es $\frac{1}{4}$.

b) su foco es el punto de coordenadas $(9, 0)$, su directriz es la recta de ecuación $x = 4$ y su excentricidad es $\frac{3}{2}$.

c) su foco es el punto de coordenadas $(2, 0)$, su directriz es la recta de ecuación $x = 4$ y su excentricidad es 1.

6

Hallar foco, directriz y excentricidad de las siguientes cónicas:

- *a)* $5x^2 + 9y^2 = 45$
- *b)* $5x^2 - 9y^2 = 45$
- *c)* $6x^2 - 2y = 0$

5.5.

COORDENADAS POLARES: ECUACION POLAR DE LAS CONICAS

La representación de $\mathbb{R}^2$ en el plano indicada en los parágrafos previos, que se denomina *cartesiana* (por Descartes), permite ubicar a puntos del plano dando dos números, sus coordenadas cartesianas x e y.

Existe otra manera de ubicar a los puntos del plano dando dos números, que se llaman *coordenadas polares*, y que vamos a ver ahora.

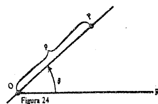


Figura 24

Para ello tomamos una semirrecta cualquiera R, fijamos un punto O cualquiera sobre ella (el *polo*) y fijamos una unidad para medir distancias en el plano. Entonces dado un punto cualquiera P del plano, distinto de O, quedan definidos la distancia entre P y O, que se indica con la letra griega ρ y se denomina *módulo*, y el ángulo que forma la recta R con la recta que contiene a O y a P, que se indica con la letra griega θ y se denomina *argumento*, medido desde R hacia la otra recta en sentido contrario al de las agujas del reloj. El número ρ y el ángulo θ son las *coordenadas polares* de P (respecto al punto O, la recta L y la unidad de medida fijados).

Observemos que para el punto O, las coordenadas polares son cero para el módulo y cualquier ángulo para el argumento, pero para cualquier otro punto hay un único módulo $\rho > 0$ y un único argumento θ correspondientes al punto.

El uso de coordenadas polares resulta particularmente útil en el caso de las cónicas, ya que las ecuaciones que las definen resultan mucho más sencillas.

Comencemos por la circunferencia; si tomamos como O el centro de la circunferencia y r es la medida de su radio, entonces la *ecuación de la circunferencia en coordenadas polares* es sencillamente la siguiente:

$$\rho = r$$

(o sea, la circunferencia en cuestión no es otra cosa que el conjunto de puntos del plano cuyo módulo es constantemente r y cuyo argumento θ es cualquiera).

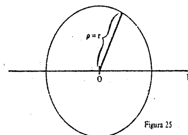


Figura 25

El resto de las cónicas también tiene una expresión sencilla (aunque no tanto como la circunferencia) expresada en términos de coordenadas polares. Para encontrar esta expresión, recordemos que, por el resultado (28) del parágrafo anterior, toda cónica está de-

terminada dando su foco **F**, la directriz **L** y la excentricidad **e**. Tomamos como polo al foco, $O = F$, como semirrecta **R** a la perpendicular a **L** que pasa por **F** y cualquier unidad de medida. Entonces, si **P** es un punto de la cónica, su distancia al foco es directamente su módulo ρ. La distancia a **L** es la medida de **PB**. Pero

$$PB = AV = |OV - OA| = |p - OA| \quad {}^{(1)}$$

y como $\dfrac{OA}{OP} = \cos\theta$ (ver apéndice si no se recuerdan

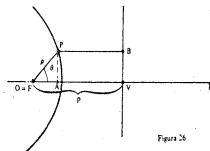


Figura 26

las funciones trigonométricas), entonces:

$$PB = |p - OP\cos\theta| = |p - \rho\cos\theta|$$

En definitiva, la condición (28) quedará escrita en la siguiente forma:

$$\frac{\rho}{|p - \rho\cos\theta|} = e$$

(1) $p - OA$ es positivo o negativo según que P esté a la izquierda o a la derecha de la directriz.

de donde despejamos inmediatamente:

$$\boxed{\rho = \frac{pe}{e\cos\theta \pm 1}} \qquad (29)^{(2)}$$

que resulta ser la ecuación general de las cónicas en coordenadas polares, o también, ecuación polar de las cónicas.

Lo interesante de (29) es que en una sola ecuación quedan incluídos todos los tipos de cónicas, a diferencia de lo que ocurría en coordenadas cartesianas, en donde cada cónica tenía su particular ecuación.

Desde luego, muchas veces se invierte la situación y resulta más práctico el uso de coordenadas cartesianas (por ejemplo, para la ecuación de la recta).

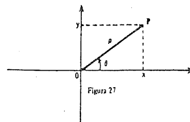


Figura 27

Si ya se tienen coordenadas cartesianas en el plano, hay una forma standard de conseguir coordenadas polares que es la siguiente: como polo **0** se toma el punto de coordenadas $(0, 0)$, como semirrecta **R** se toma la parte del eje de abscisas que corresponde a $x \geq 0$ y como unidad de medida la dada por el segmento que va del $(0, 0)$ al $(0, 1)$. Si con el sistema así resultante un punto **P** tiene coordenadas polares ρ y θ, entonces sus coordenadas cartesianas son:

(2) Se obtiene el signo + cuando $p - \rho\cos\theta$ es positivo y − en el otro caso. Observar que si $e < 1$ (elipse o parábola), hay que considerar uno solo de los signos en (29), mientras que si $e > 1$ (hipérbola), hay que considerar los dos (la hipérbola tiene dos ramas, una a la izquierda y la otra a la derecha de la directriz).

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

Esta expresión define entonces el *paso de coordenadas polares a cartesianas.*

Si conocemos las coordenadas cartesianas (x, y) de un punto **P**, entonces sus coordenadas polares se obtienen de las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{(por Pitágoras)} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

expresión que define entonces el *paso de coordenadas cartesianas a polares.*

Es común dar la siguiente expresión de paso de coordenadas cartesianas a polares:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Esta es más corta y sencilla, pero tiene el inconveniente de que el argumento θ no queda totalmente determinado conociendo su tangente. Por ejemplo, si **P** es el punto de coordenadas $(-1, 0)$, entonces

$$\rho = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{0}{-1} = 0$$

y puede ser $\theta = 0$ ó $\theta = \pi$. En cambio, sabiendo que $\text{sen}\,\theta = \dfrac{0}{1} = 0$ y $\cos\theta = \dfrac{-1}{1} = -1$, entonces la primera posibilidad queda descartada y deducimos $\theta = \pi$.

Como otro ejemplo, si **P** es el punto de coordenadas $(1, -1)$, entonces

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{-1}{1} = -1$$

y podría ser $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ ó $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$. Pero con $\text{sen}\,\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, descartamos la primera posibilidad y deducimos $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$

EJERCICIOS

1

Hallar las coordenadas cartesianas de los puntos cuyas coordenadas polares son:

- ▲ *a)* $\rho = 4,\ \theta = \pi/6$
- ▲ *b)* $\rho = 2,\ \theta = \pi/3$
- ▲ *c)* $\rho = 0,\ \theta = \pi/2$
- ▲ *d)* $\rho = 1,\ \theta = \pi/4$
- ▲ *e)* $\rho = 2,\ \theta = 5\pi/3$
- ▲ *f)* $\rho = \sqrt{2},\ \theta = 9\pi/6$

2

Hallar las coordenadas polares de los puntos cuyas coordenadas cartesianas son:

- a) $(1, 0)$
- b) $(0, 1)$
- c) $(-1, 0)$
- d) $(0, -1)$
- e) $(1, 1)$
- f) $(-1, 1)$
- g) $(-1, -1)$
- h) $(1, \sqrt{3})$
- i) $(1, -\sqrt{3})$
- j) $(-1, \sqrt{3})$
- k) $(-1, -\sqrt{3})$
- l) $(\sqrt{3}, 1)$
- m) $(-\sqrt{3}, -1)$
- n) $(-\sqrt{3}, 1)$
- o) $(\sqrt{3}, -1)$

3

Hallar las ecuaciones cartesianas de las curvas cuyas ecuaciones polares son:

- a) $\rho = 3$
- b) $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$
- c) $\theta = \pi/4$
- d) $\rho = 4 \operatorname{sen}\theta$
- e) $\rho^2 \operatorname{sen} 2\theta = 9$
- f) $\rho = 2 \sec\theta$

4

Hallar las ecuaciones polares de las curvas cuyas ecuaciones cartesianas son:

- *a)* $3x - 2y = 5$
- *b)* $xy = 5$
- *c)* $x^2 - y^2 = 9$
- *d)* $x^2 + y^2 - 4x = 0$

5

Representar en el plano las curvas cuyas ecuaciones polares son:

- a) $\rho = 4$
- b) $\theta = \pi/3$
- c) $\rho = 2\cos\theta$
- d) $\rho^2 = 9\cos 2\theta$ (lemniscata)
- e) $\rho \operatorname{sen}\theta = -1$
- f) $\rho = \theta$
- g) $\rho = 2(1 + \cos\theta)$ (cardioide)

APENDICE

LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Recordaremos aquí la definición de las funciones trigonométricas y algunas de sus propiedades.

Si tenemos un triángulo rectángulo **ABC** (el ángulo **ACB** recto) y θ es el ángulo entre **AC** y **AB**, entonces se definen:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{BC}{AB}$$

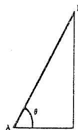


Figura 28

$$\cos\theta = \frac{AC}{AB}$$ (luego $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, por Pitágoras)

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\operatorname{cotg} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

De esta manera quedan definidas las funciones trigonométricas para ángulos θ *mayores que* **0** *y menores que el ángulo recto.* La extensión de estas funciones a ángulos cualesquiera se efectúa de la siguiente manera:

Consideremos un sistema cartesiano de coordenadas en el plano y la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Si tomamos un ángulo θ menor que un recto y mayor que cero desde el eje de abscisas en sentido contrario al de las agujas del reloj, entonces en el triángulo dibujado en la figura, como el radio es **1**, resulta:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x$$

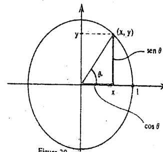


Figura 29

Por lo tanto la abscisa del punto resultante al girar un ángulo θ es el coseno de dicho ángulo y la ordenada es su seno.

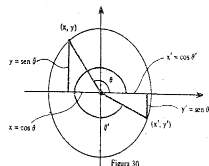


Figura 30

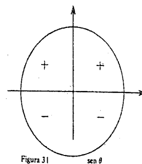


Figura 31

Esto nos motiva inmediatamente para definir las funciones seno y coseno para cualquier ángulo: si θ es el ángulo, girando en sentido contrario a las agujas del reloj en ese ángulo, obtendremos un punto (x, y) de la circunferencia. Definimos entonces:

$$\operatorname{sen}\theta = y; \qquad \cos\theta = x$$

Observemos que, con esta definición, el seno es positivo en los dos primeros cuadrantes y negativo en

los dos últimos, mientras que el coseno es positivo en 1er. y 4° cuadrantes y negativo en 2° y 3°.

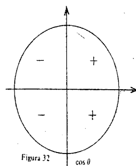


Figura 32

Desde luego, con esta definición se sigue conservando la propiedad:

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

(ya que $\text{sen}^2\ \theta + \cos^2\ \theta = y^2 + x^2 = 1$, por estar (x, y) en la circunferencia).

Introduzcamos ahora un sistema de medición de ángulos, llamado ***sistema circular.*** La unidad de medida, en este sistema, es aquel ángulo θ con la propiedad de que el arco de circunferencia subtendido por él tiene longitud igual a 1. Dicho ángulo se dice de *un radián.* Como evidentemente el arco subtendido es

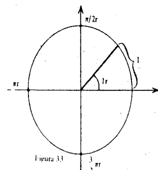


Figura 33

proporcional al ángulo, entonces el ángulo llano, por ejemplo, medirá π radianes (si llamamos π a la longitud de la semicircunferencia). El ángulo recto, mitad del anterior, medirá $\pi/2$ radianes.

Es claro entonces que los ángulos pueden medir desde 0 radianes hasta 2π radianes ***pero sin alcanzar este último valor*** (un ángulo de 2π radianes, si eso significa algo, es un ángulo de 0 radianes).

Ya que las funciones trigonométricas están definidas sobre ángulos y los ángulos se pueden medir (en radianes, por ejemplo), entonces podemos pensar en las funciones trigonométricas como definidas sobre ***números*** más que sobre ángulos. Por ejemplo, podemos definir $\text{sen}\,\frac{\pi}{2}$ como el seno del ángulo que mide $\frac{\pi}{2}$ radianes, o sea:

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = \text{sen}\,(\frac{\pi}{2}\text{r}) = 1$$

Y esto lo podemos hacer para varios números reales; definimos *sen* x como el seno del ángulo que mide x radianes. ¿Para cuáles números? Como los ángulos varían entre 0 radianes y 2π radianes, entonces la función seno está así definida para $0 \leqslant x < 2\pi$, es decir:

$$\text{sen}: [\,0, 2\pi\,) \to \mathbf{R}$$

Guiados por el dibujo, como al llegar a 2π radianes tenemos nuevamente el ángulo cero, entonces es natural *extender* la definición del seno a mayores números reales simplemente "volviendo a empezar". Más precisamente, si $2\pi \leqslant x < 4\pi$, definimos:

$$\text{sen}\ x = \text{sen}\ (x - 2\pi)$$

(como $x - 2\pi$ está entre 0 y 2π, el segundo miembro ya está definido). No hay porqué parar ahora. Si $4\pi \leqslant x < 6\pi$, definimos

$$\text{sen}\ x = \text{sen}\ (x - 4\pi)$$

(nuevamente, como $x - 4\pi$ está entre 0 y 2π, el segundo miembro ya estaba definido). Así siguiendo, definimos **sen** x para x tan grande como se quiera.

Más aún, podemos definir **sen** x para $x < 0$ con similar procedimiento. Por ejemplo, si $-2\pi \leqslant x < 0$, definimos

$$\text{sen}\ x = \text{sen}\ (x + 2\pi),$$

si $-4\pi \leqslant x < -2\pi$, definimos $\text{sen}\ x = \text{sen}\ (x + 4\pi)$, etc.

De esta manera, resulta **sen** x definido para todo $x \in \mathbf{R}$, es decir, tenemos una función:

$$\text{sen}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

La representación gráfica de esta función es sencilla: basta observar (en la circunferencia) que **sen** x crece hasta llegar a 1 en $\frac{\pi}{2}$, decrece hasta llegar a 0 en π, sigue decreciendo y se hace -1 en $3\pi/2$, vuelve a crecer hasta llegar a 0 en 2π y después, simplemente, se vuelve a repetir (y antes de cero, también):

Representación gráfica de $f(x) = \text{sen}\ x$

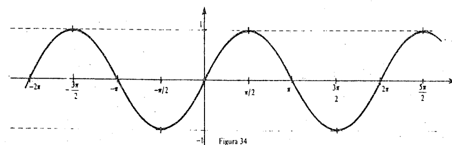


Figura 34

Desde luego, iguales consideraciones se pueden hacer para definir **cos:** $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, cuya representación gráfica indicamos:

Representación gráfica de $f(x) = \cos x$

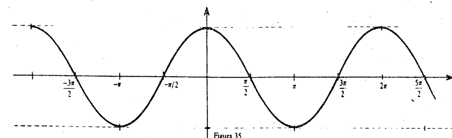


Figura 35

Las demás funciones se definen apelando a estas dos:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,; \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,;$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,.$$

y hay que hacer notar que *no* están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$; **tg** y **sec** no están definidas para los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ y **cotg** y **cosec** *no* están definidas para los múltiplos de π (pues en esos valores los respectivos denominadores valen cero).

Las funciones **sen** y **cos** tienen las siguientes propiedades:

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \operatorname{sen} y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \qquad (30)$$

Estas propiedades son sencillas de probar si los ángulos están entre 0 y $\pi/2$. Para ello, en la figura observamos que:

$$\operatorname{sen}\alpha \,.\, \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \,.\, \cos\alpha =$$

$$= \frac{BC}{AB}\cdot\frac{AB}{AD} + \frac{DB}{AD}\,.\,\cos\alpha =$$

$$= \frac{BC}{AD} + \frac{DB\,.\,\cos\alpha}{AD} =$$

$$= \frac{EF + ED}{AD} = \frac{DF}{AD} =$$

$$= \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$$

lo que prueba la primera fórmula de (30) referida a la *suma* de ángulos (ver la primera o la segunda figura según que $\alpha + \beta$ sea menor o mayor que un recto).

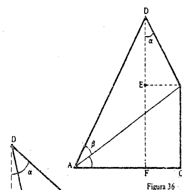


Figura 36

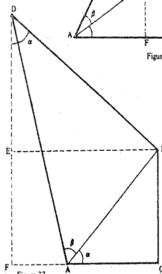


Figura 37

Ahora una prueba de la fórmula en el caso general resulta como consecuencia de una tediosa combinación de los casos posibles (que se aconseja evitar si se sabe cómo hacerlo). Análogamente se prueba la fórmula para el coseno.

Antes de finalizar, hacemos dos observaciones importantes:

• 1°) Tanto para dar la definición como para deducir algunas propiedades de las funciones trigonométricas, hemos usado propiedades del plano y de ciertas figuras planas. Pero siendo las funciones trigonométricas funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y siendo sus propiedades, en última instancia, propiedades de los números reales, uno se podría preguntar si no existirá una definición de estas funciones y una demostración de sus propiedades ***que no utilice otra cosa que las propiedades básicas de los números reales estudiadas en el Capítulo 1.*** Efectivamente, existe una tal definición, y las consiguientes demostraciones, y la veremos en el Apéndice al Capítulo 8.

¿Por qué las definimos ahora, entonces? (hay libros que no lo hacen, que esperan hasta tener la noción de integral para introducirlas). Los motivos son dos: por un lado estas funciones nos van a dar ejemplos ilustrativos de los sucesivos conceptos que vayan apareciendo (límite, derivada, etc.), y por el otro, si no se las estudia en los ejemplos mencionados, ***no se entiende el porqué se las define después como se las define.*** Entonces, al mismo tiempo que las usamos (siempre como ejemplos, nunca en la teoría) para consolidar los nuevos conceptos, vamos motivando la posterior definición.

• 2°) Nuestra actitud al estudiar el plano ha sido muy distinta de la que hemos tenido al estudiar los números reales. Hemos aceptado muchas propiedades en razón de su evidencia, sin casi mencionarlo, no hemos dado una lista de propiedades básicas *del plano* a partir de las cuales se deduzcan todas las demás. Eso puede hacerse, está hecho, pero es tema de otro libro. (1) El plano, y toda la consecuente geometría, sólo será para nosotros un terreno de ***aplicación*** de los conceptos sobre números reales que aprendamos y de sus propiedades, pero no objeto de nuestro estudio.

El resto de la trigonometría básica que hay que conocer para seguir adelante está contenido en los ejercicios que vienen a continuación.

(1) **Ver, por ejemplo, *"El plano"* de J.A. Tirao en esta misma colección.**

EJERCICIOS

1

Calcular el valor de las funciones trigonométricas (cuando estén definidas) en $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ y 2π.

2

Probar la segunda de las fórmulas (30) (referida a la suma) para ángulos entre 0 *y* $\pi/2$.

3

A partir de (30) y del ejercicio 1, probar las siguientes propiedades de las funciones trigonométricas:

- a) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$;
- b) $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$;
- c) $\cos(-x) = \cos x$;
- d) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)$
- e) $\cos x = -\cos(\pi - x)$
- f) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$;
- g) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{sen} x$;
- h) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$;
- i) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$;
- j) $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$;
- k) $\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$.

Interpretar b), c), d), e), f) y g) geométricamente.

4

Sabiendo que $\cos t = 2/5$, calcular

$|\text{sen } t|$, $|\text{tg } t|$, $|\text{cotg } t|$, $\sec t$, $|\text{cosec } t|$.

5

Probar que:

★ a) $\left|\text{sen}\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

★ b) $\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

(SUGERENCIA: usar 2) i) poniendo $\frac{x}{2}$ en lugar de x).

6

Hacer la representación gráfica de la función tangente.

7

Probar que $\text{tg}(x+y) = \dfrac{\text{tg } x + \text{tg } y}{1 - \text{tg } x \text{ tg } y}$ si x, y, $x+y$ no son múltiplos impares de $\pi/2$.

8

Probar que $\text{sen } x = \dfrac{\text{tg } x}{\sqrt{1+\text{tg}^2 x}}$ y que $|\cos x| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2 x}}$.

(SUGERENCIA: elevar $\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \text{tg } x$ al cuadrado y usar 2) a)).

CAPITULO VI

Límite de Funciones y Continuidad

Si existe ***un*** concepto central en el Cálculo, ese es el de ***límite de funciones.*** Como ese va a ser el tema del presente capítulo, se entiende la importancia que reviste su estudio cuidadoso.

6.1. DEFINICION DE LIMITE

Consideremos una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un número real cualquiera. La función tomará un cierto valor en x_0, $f(x_0)$, pero lo que nos va a interesar ahora no es lo que vale la función *en* x_0 sino *cerca de* x_0.

Puesto en otras palabras, lo que vamos a estudiar ahora es qué le pasa a $f(x)$ ***cuando*** x ***se acerca a*** x_0.

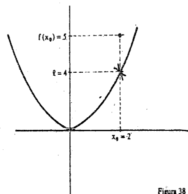


Figura 38

Quizás el lector no entienda, a esta altura, por qué hay que estudiar eso, pues le parecerá que hay una respuesta natural: si x se acerca a x_0, entonces $f(x)$ se acercará a $f(x_0)$. Que eso no es así, en general, lo mues-

tra el siguiente ejemplo: consideremos la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por (ver figura):

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Entonces, para esta función, es $f(2) = 5$, pero parece claro que cuando x se acerca a 2 (siendo distinto de 2), entonces $f(x) = x^2$ se acerca a $2^2 = 4$. En general, entonces, $f(x)$ puede aproximarse a un valor $\ell \neq f(x_0)$ cuando x se acerca a x_0.

Desde luego, se podrá objetar que esta patología no ocurrirá con funciones "normales"; efectivamente así es, pero postergaremos el estudio de las funciones "normales" (a las que llamaremos *continuas*) hasta el parágrafo 6.5. Por ahora, entonces, $f(x)$ puede aproximarse a un valor distinto de $f(x_0)$ cuando x se acerca a x_0.

Nuestra primer tarea es dar una definición precisa del significado de la frase "$f(x)$ se acerca a ℓ cuando x se acerca a x_0". Para llegar a esa definición, hacemos dos observaciones:

★ 1° Para que $f(x)$ se acerque a ℓ cuando x se acerca a x_0, no tiene la menor importancia cuánto vale la función *en* x_0 sino cuánto vale *cerca de* x_0.

★ 2° Que $f(x)$ se acerque a ℓ es lo mismo que decir que $f(x) - \ell$ se acerca a cero. Y esto último sólo puede significar que $|f(x) - \ell|$ se puede hacer *tan pequeño como se quiera.* Luego la frase "$f(x)$ se acerca a ℓ cuando x se acerca a x_0" podría ponerse en la siguiente forma: "$|f(x) - \ell|$ puede hacerse *tan pequeño como se quiera* con tal de tomar $|x - x_0|$ *suficientemente pequeño* (pero distinto de cero)".

Ahora bien, que $|f(x) - \ell|$ se pueda hacer tan pequeño como se quiera significa que, dado cualquier número positivo ϵ, se puede conseguir que $|f(x) - \ell|$ sea menor que ϵ . . . con tal que $|x - x_0|$ sea suficientemente pequeño, es decir con tal que sea $|x - x_0| < \delta$ para un cierto δ (que dependerá de cuál sea ϵ).

Ya podemos dar la definición oficial de límite:

DEFINICION 6.1.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y sea f una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto (a, b) que contiene a x_0, salvo quizás en el mismo x_0.

Decimos que $f(x)$ *tiende a* ℓ *cuando* x *tiende a* x_0, o que $f(x)$ *tiene límite* ℓ *cuando* x *tiende a* x_0, si f tiene la siguiente propiedad:

"Cualquiera sea $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ ($\delta = \delta(\epsilon)$) tal que, si es

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

entonces es:

$$|f(x) - \ell| < \epsilon."$$

Si se verifica esa propiedad, escribimos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

OBSERVACIONES

● 1 La definición de límite puede ponerse de la siguiente manera:

Es $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si existe una función $\delta: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ que tiene la siguiente propiedad: "para todo $\epsilon > 0$, la implicación:

$$0 < |x - x_0| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

es verdadera".

Por lo tanto, para probar en un caso particular que f tiene un cierto límite cuando $x \to x_0$, lo que hay que hacer es encontrar una función $\delta = \delta(\epsilon)$ que tenga la propiedad mencionada (y probar que la tiene).

● 2 Notemos que el antecedente de la implicación mencionada no es "$|x - x_0| < \delta$" sino "$0 < |x - x_0| < \delta$"; esto se debe a que, insistimos, no nos interesa lo que pasa *en* x_0 sino *cerca de* x_0.

● 3 Como la desigualdad $|f(x) - \ell| < \epsilon$ equivale a la desigualdad:

$$\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$$

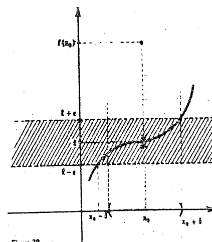


Figura 39

y la desigualdad $0 < |x - x_0| < \delta$ equivale a:

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \qquad (x \neq x_0)$$

entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ significa, en la representación gráfica de f, que cualquiera sea $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (dependiente de ϵ; en general, más chico cuánto más chico sea ϵ) tal que si x está en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y x es distinto de x_0, entonces $f(x)$ está en la zona rayada (ver figura).

Desde luego, $f(x_0)$ no tiene porqué estar en esa zona (aunque también puede estar; desde el punto de vista del límite, eso no interesa).

Veamos, en algunos ejemplos, el tipo de mecanismos que hay que utilizar para probar que una función dada tiene un cierto límite al acercarse x a un cierto x_0.

EJEMPLOS

1

Consideremos la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$ y sea $x_0 = 3$.

Afirmamos que es:

$$\lim_{x \to 3} 2x + 1 = 7$$

Observemos que es:

$$|f(x) - \ell| = |2x + 1 - 7| = |2x - 6| = |2(x - 3)| = 2|x - 3|$$

y, por lo tanto, que sea $|f(x) - \ell| < \epsilon$ significa, en este caso, que $2|x - 3| < \epsilon$. Aquí, como hacíamos en sucesiones con el n, *despejamos* $|x - 3|$ para obtener: $|x - 3| < \frac{\epsilon}{2}$. Una vez despejado $|x - 3|$ (en general una vez despejado $|x - x_0|$ de la desigualdad $|f(x)-$

$- \ell| < \epsilon$) ya se puede estar seguro de que todo va a andar bien, de la siguiente manera. Sea:

$$\delta = \frac{\epsilon}{2}$$

(o sea, $\delta(\epsilon) = \epsilon/2$). Entonces, si $0 < |x-3| < \delta$, en particular es $|x-3| < \frac{\epsilon}{2}$ y por lo tanto:

$$|f(x) - \ell| = 2|x-3| < 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

lo cual, siendo $\epsilon > 0$ arbitrario, demuestra lo afirmado.

2

Consideremos la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ y sea $x_0 = 2$.

Afirmamos que es:

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

En este caso es:

$$|f(x) - \ell| = |x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2|$$

Ahora no podemos repetir lo hecho en el ejemplo anterior, no podemos despejar $|x-2|$ de la desigualdad $|x-2||x+2| < \epsilon$ (resultaría $|x-2| < \epsilon / |x+2|$ y no sirve tomar $\delta = \epsilon / |x+2|$, δ debe depender de ϵ *pero no de* x). En vista de esto, apelamos al siguiente proceso de *acotación:*

Hay que elegir $\delta = \delta(\epsilon)$; elijamos, de entrada, $\delta' = 1$. Entonces, si $|x-2| < 1$ será:

$$-1 < x-2 < 1 \Rightarrow 3 < x+2 < 5 \quad \text{(sumando 4)}$$

y, en particular, si $|x-2| < 1$ es:

$$|x+2| < 5$$

Por lo tanto, y siempre si $|x-2| < 1$:

$$|f(x) - \ell| = |x-2||x+2| < |x-2|5 = 5|x-2|$$

y ahora sí podemos despejar $|x-2|$ de $\delta|x-2| < \epsilon$. Resulta ser $|x-2| < \frac{\epsilon}{5}$. Uno se sentiría tentado a tomar $\delta = \epsilon/5$, pero recordando que hemos usado previamente un δ' igual a 1, tomamos:

$$\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{5}\right)$$

(eso significa que δ es el menor de los dos números 1 y $\epsilon/5$). Entonces $\delta \leqslant 1$ y $\delta \leqslant \frac{\epsilon}{5}$. Ahora probamos nuestra afirmación. Si $|x-2| < \delta$, entonces:

$$|f(x) - \ell| = |x-2||x+2| < \qquad \text{(por ser } \delta \leqslant 1)$$

$$< |x-2| \cdot 5 < \qquad \left(\text{por ser } \delta \leqslant \frac{\epsilon}{5}\right)$$

$$< \frac{\epsilon}{5} \cdot 5 = \epsilon$$

lo cual, siendo $\epsilon > 0$ cualquiera, prueba lo afirmado.

3

Consideremos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} & \text{si} \quad |x| \neq 1 \\ 1 & \text{si} \quad |x| = 1 \end{cases}$$

Afirmamos que es:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

En efecto, observemos que es, si $|x| \neq 1$:

$$|f(x) - 2| = \left|\frac{x^2+2x-3}{x^2-1} - 2\right| = \left|\frac{x^2+2x-3-2x^2+2}{x^2-1}\right| =$$

$$= \left|\frac{-x^2+2x-1}{x^2-1}\right| = \left|\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\right| =$$

$$= \frac{|(x-1)^2|}{|(x-1)(x+1)|} = \frac{|x-1|^2}{|x-1||x+1|} =$$

$$= \frac{|x-1|}{|x+1|}$$

Se nos presenta el mismo problema que en el ejemplo anterior: si queremos despejar $|x-1|$ de la desigualdad $\frac{|x-1|}{|x+1|} < \epsilon$, obtendremos un δ que depende de x además de ϵ. Esto no puede ser así (para cada ϵ debe haber un δ bien determinado tal que, etc.). Luego, hay que acotar otra vez.

Tomemos entonces $\delta' = 1$; si $0 < |x-1| < 1$, entonces $|x-1| < 1$, o sea:

$$-1 < x-1 < 1 \Rightarrow 1 < x+1 < 3 \qquad \text{(sumando 2)}$$

Como $x+1$ es, en consecuencia, positivo, resultará $1 < |x+1| < 3$; aquí conviene acotar por el *menor* número, ya que $|x+1|$ aparece en *denominador* de $|f(x)-2|$. Considerando entonces que $1 < |x+1|$ resulta $\frac{1}{|x+1|} < 1$, y por lo tanto:

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < \frac{|x-1|}{1} = |x-1|$$

y despejar $|x-1|$ de la desigualdad $|x-1| < \epsilon$ insume cero de trabajo (ya está despejado por así decir). Podríamos pensar en tomar $\delta = \epsilon$, pero recordando que hemos usado previamente un δ' igual a 1, tomamos:

$$\delta = \min(1, \epsilon)$$

(con lo cual $\delta \leqslant 1$ y $\delta \leqslant \epsilon$).

Ahora probamos la afirmación. Si $0 < |x-1| < \delta$, entonces:

$$|f(x) - 2| = \frac{|x-1|}{|x+1|} < \qquad (\text{ya que } \delta \leqslant 1)$$

$$< \frac{|x-1|}{1} < \qquad (\text{ya que } \delta \leqslant \epsilon)$$

$$< \epsilon$$

Siendo ϵ cualquiera, queda probada nuestra afirmación.

Observemos que, en este ejemplo, $\lim_{x \to 1} f(x)$ es distinto de $f(1)$ (el límite es 2 y $f(1)$ vale 1 por definición de la función).

EJERCICIOS

1

Demostrar las siguientes afirmaciones:

- a) $\lim_{x \to 2} 3x - 1 = 5$;
- b) $\lim_{x \to 3} -2x + 4 = -2$;
- c) $\lim_{x \to 3} 2x^2 = 18$;
- d) $\lim_{x \to 2} x^2 + 2x = 8$;
- e) $\lim_{x \to 1} -2x^2 + 3x = 1$;

♦ f) $\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x+3} = \frac{3}{5}$;

♦ g) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = 1$;

♦ h) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$;

♦ i) $\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$;

♦ j) $\lim_{x\to 9} \sqrt{x} = 3$;

♦ k) $\lim_{x\to 1} x^2 + \sqrt{x} = 2$;

♦ l) $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$;

♦ m) $\lim_{x\to 8} \sqrt[3]{x} = 2$;

♦ n) $\lim_{x\to 9} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$;

♦ o) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = 27$;

♦ p) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{9}$

En los incisos a), c) y f), hallar el δ correspondiente a $\epsilon = 0,1$, a $\epsilon = 0,01$ y a $\epsilon = 0,002$.

2

Sean f *y* g *dos funciones definidas en* (a, b), *tales que:*

★ *i)* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$

★ *ii) existe* $\delta' > 0$ *tal que* $f(x) = g(x)$ *para* $0 < |x - x_0| < \delta'$.

Probar que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. (SUGERENCIA: *tomar* $\delta < \delta'$*).*

3

Probar que si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, entonces para todo número real c es $\lim_{x\to x_0} c\,.\,f(x) = c\,.\,\ell$.

4

Probar que si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, entonces $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$.

5

Si f *es la función constante,* $f(x) = c$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *entonces* $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$ *cualquiera sea* $x_0 \in \mathbb{R}$.

6.2. PROPIEDADES DEL LIMITE

Ahora vamos a estudiar algunas propiedades del límite; varias de ellas serán análogas a las correspondientes propiedades del límite de sucesiones, e incluso sus demostraciones serán análogas. Otras, en cambio, serán específicas de la noción de límite de funciones.

Comenzamos probando la unicidad del límite (en caso de que exista).

PROPOSICION 6.2.

Sea f definida en todo (a, b) salvo quizás en $x_0 \in (a, b)$. Si ℓ_1 y ℓ_2 tienen las propiedades:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_2$$

entonces debe ser $\ell_1 = \ell_2$.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ un número real arbitrario; siendo $\frac{\epsilon}{2} > 0$ entonces, como $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que, si $0 < |x - x_0| < \delta_1$, entonces $|f(x) - \ell_1| < \frac{\epsilon}{2}$. Análogamente, existe $\delta_2 > 0$ tal que, si $0 < |x - x_0| < \delta_2$, entonces $|f(x) - \ell_2| < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $x \in (a, b)$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_1$ y tal que $0 < |x - x_0| < \delta_2$. Entonces valen las dos desigualdades y por lo tanto:

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \leqslant |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| = |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Resulta entonces que $|\ell_1 - \ell_2|$ es menor que cualquier número positivo. Como además es mayor o igual que cero, se deduce del Ejercicio 2.b del parágrafo 1.9. que $|\ell_1 - \ell_2| = 0$. Luego $\ell_1 = \ell_2$. ///

PROPOSICION 6.3.

Supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. Entonces:

a) Si $\ell < b$, existe $\delta > 0$ tal que, para $0 < |x - x_0| < \delta$, es $f(x) < b$

b) Si $\ell > b$, existe $\delta > 0$ tal que, para $0 < |x - x_0| < \delta$, es $f(x) > b$.

Demostración

★ a) Sea $\epsilon = b - \ell$; entonces es $\epsilon > 0$ y por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que, para $0 < |x - x_0| < \delta$, es $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Luego:

$$-\epsilon < f(x) - \ell < \epsilon \Rightarrow \ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$$

Pero $\ell + \epsilon = \ell + (b - \ell) = b$; luego, en particular resulta $f(x) < b$ para $0 < |x - x_0| < \delta$.

★ b) Análoga tomando $\epsilon = \ell - b$. ///

PROPOSICION 6.4.

Sean f, g y h tres funciones definidas en un intervalo (a, b) salvo quizás en $x_0 \in (a, b)$ y tales que

● i) $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$

● ii) $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ para todo $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$.

Entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ arbitrario; por

i), existen δ_1 y δ_2 tales que:

para $0<|x-x_0|<\delta_1$ es $|g(x)-\ell|<\epsilon$ (luego $-\epsilon<g(x)-\ell<\epsilon$)

para $0<|x-x_0|<\delta_2$ es $|h(x)-\ell|<\epsilon$ (luego $-\epsilon<h(x)-\ell<\epsilon$)

Entonces, si $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, para $0<|x-x_0|<\delta$ valen las dos desigualdades. Pero, siendo $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$, es, para $0<|x-x_0|<\delta$:

$$-\epsilon<g(x)-\ell\leqslant f(x)-\ell\leqslant h(x)-\ell<\epsilon$$

de donde:

$$|f(x)-\ell|<\epsilon \quad \text{para} \quad 0<|x-x_0|<\delta$$

Como $\epsilon>0$ era arbitrario, se deduce lo afirmado. ///

Podemos pasar ahora al estudio del comportamiento del límite respecto a las operaciones de suma, producto y cociente. Comenzamos por la suma:

PROPOSICION 6.5.

Sean f y g dos funciones tales que, para un cierto $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell_1, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x)=\ell_2$$

Entonces

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x))=\ell_1+\ell_2$$

Demostración: Como $f(x)$ está definida para $x\in(a_1,b_1)$, $x\neq x_0\in(a_1,b_1)$ y $g(x)$ está definida para $x\in(a_2,b_2)$, $x\neq x_0$, entonces $f(x)+g(x)$ está definida para $x\in(a,b)$, $x\neq x_0$, donde $a=\max(a_1,a_2)$, $b=\min(b_1,b_2)$.

Sea $\epsilon>0$ arbitrario; como $\epsilon/2$ es también un número positivo, por definición de límite de una función existen δ_1 y δ_2 positivos tales que:

$$|f(x)-\ell_1|<\frac{\epsilon}{2} \quad \text{para} \quad 0<|x-x_0|<\delta_1$$

$$|g(x)-\ell_2|<\frac{\epsilon}{2} \quad \text{para} \quad 0<|x-x_0|<\delta_2$$

Entonces, si $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ para $0<|x-x_0|<\delta$ resulta:

$$|f(x)+g(x)-(\ell_1+\ell_2)|=|f(x)+g(x)-\ell_1-\ell_2|=$$
$$=|f(x)-\ell_1+g(x)-\ell_2|\leqslant$$
$$\leqslant|f(x)-\ell_1|+|g(x)-\ell_2|<$$
$$<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

y siendo ϵ arbitrario, queda probada la proposición. ///

PROPOSICION 6.6.

Sean f y g dos funciones tales que, para un cierto $x_0\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell_1, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x)=\ell_2$$

Entonces es:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\,.\,g(x))=\ell_1\,.\,\ell_2$$

Demostración: El dominio de definición de la función $x\to f(x)\,.\,g(x)$ se obtiene igual que en la Proposición 6.5.

Sea $\epsilon>0$ arbitrario. Notemos que es:

$$|f(x).g(x)-\ell_1\ell_2|=|f(x)g(x)-f(x)\ell_2+f(x)\ell_2-\ell_1\ell_2|$$
$$\leqslant|f(x)g(x)-g(x)\ell_2|+|f(x)\ell_2-\ell_1\ell_2|$$
$$=|f(x)||g(x)-\ell_2|+|\ell_2||f(x)-\ell_1|$$

Como $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=|\ell_1|$ (Ejercicio 5 de 6.1.) y $|\ell_1|<|\ell_1|+1$, entonces, por Proposición 6.3. a, debe existir un $\delta_1<0$ tal que $|f(x)|<|\ell_1|+1$ para $0<|x-x_0|<\delta_1$. Además, por definición de límite, deben existir δ_2 y δ_3 positivos tales que (si $\ell_2\neq 0$):

$$|f(x)-\ell_1|<\frac{\epsilon}{2|\ell_2|} \quad \text{si} \quad 0<|x-x_0|<\delta_2$$

$$|g(x)-\ell_2|<\frac{\epsilon}{2(|\ell_1|+1)} \quad \text{si} \quad 0<|x-x_0|<\delta_3$$

Sea entonces $\delta=\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$. Si $0<|x-x_0|<\delta$, será:

$$|f(x)g(x)-\ell_1\ell_2|\leqslant|f(x)||g(x)-\ell_2|+|\ell_2||f(x)-\ell_1|<$$
$$<(|\ell_1|+1).\frac{\epsilon}{2(|\ell_1|+1)}+|\ell_2|.\frac{\epsilon}{2|\ell_2|}=\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

lo cual prueba lo afirmado (si $\ell_2=0$, no hace falta tomar δ_2, con δ_1 y δ_3 basta). ///

PROPOSICION 6.7.

Sean f y g dos funciones tales que, para un cierto $x_0\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell_1, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x)=\ell_2$$

y supongamos que ℓ_2 es *distinto de cero*. Entonces:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ell_1}{\ell_2}$$

Demostración: Como $\ell_2\neq 0$, entonces $|\ell_2|>0$. Por Proposición 6.3. b, existe un $\delta'>0$ tal que, para $0<|x-x_0|<\delta'$ es $|g(x)|>0$ (ya que $|g(x)|\to|\ell_2|>0$), en particular, $g(x)\neq 0$.

Luego el dominio de definición de $\frac{f(x)}{g(x)}$ es (a,b) donde:

$$a=\max(a_1,a_2,x_0-\delta'),$$
$$b=\min(b_1,b_2,x_0+\delta)$$

(a_1, a_2, b_1 y b_2 son como en la Proposición 6.5.).

Pasemos a la demostración. En primer término probamos que:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\ell_2} \qquad (1)$$

En efecto, es:

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\ell_2}\right|=\left|\frac{\ell_2-g(x)}{g(x)\ell_2}\right|=\frac{|g(x)-\ell_2|}{|g(x)||\ell_2|}$$

Como $\lim_{x\to x_0}|g(x)|=|\ell_2|$ y $|\ell_2|>|\ell_2|/2$ (por ser $|\ell_2|>0$), entonces existe, por Proposición 6.3.b, un $\delta_1>0$ tal que, para $0<|x-x_0|<\delta_1$ es $|g(x)|>|\ell_2|/2$. Y como $\lim_{x\to x_0}g(x)=\ell_2$, dado $\epsilon>0$ existe $\delta_2>0$ tal que, para $0<|x-x_0|<\delta_2$:

$$|g(x)-\ell_2|<\frac{2\epsilon}{|\ell_2|^2}$$

Entonces, para $0<|x-x_0|<\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$:

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{\ell_2}\right|=\frac{|g(x)-\ell_2|}{|g(x)||\ell_2|}\quad\frac{2\epsilon/|\ell_2|^2}{\frac{1}{2}|\ell_2|.|\ell_2|}<\epsilon$$

y siendo $\epsilon>0$ cualquiera, queda probado (1).

Ahora la Proposición se sigue fácilmente de la Proposición 6.6.:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} =$$

$$= \ell_1 \cdot \frac{1}{\ell_2} = \ell_1/\ell_2 \quad ///$$

Las tres últimas Proposiciones nos dicen que el límite se comporta de la mejor manera posible respecto a las operaciones: el límite de la suma es la suma de los límites, el límite del producto es el producto de los límites y el límite del cociente es el cociente de los límites (en este último caso, si el límite del denominador es distinto de cero).

Para la próxima Proposición, vamos a tener que tener en claro qué significa que *no* sea cierto que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. De acuerdo a 6.1., eso es lo mismo que decir:

> "*No* es cierto que para todo $\epsilon > 0$ exista $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ implique $|f(x) - \ell| < \epsilon$". (2)

Para llegar a una forma operativa de escribir esa afirmación, razonamos de la siguiente manera. La frase dice: "*No* es cierto que para todo $\epsilon > 0$ pase tal cosa" y eso es lo mismo que decir: "Existe $\epsilon > 0$ tal que *no* pasa la tal cosa". Pero "*no* pasa la tal cosa" es lo mismo que "*no* existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ implique $|f(x) - \ell| < \epsilon$". Y que no exista $\delta > 0$ con esa propiedad es lo mismo que decir que para todo $\delta > 0$ *no* se cumple esa propiedad, o sea, "para todo $\delta > 0$, *no* es cierto que $0 < |x - x_0| < \delta$ implique $|f(x) - \ell| < \epsilon$". Pero que *no* sea cierto que una primera cosa implique una segunda, significa que para alguien vale la primera cosa pero *no* la segunda, o sea, existe x que cumple $0 < |x - x_0| < \delta$ pero para el que es $|f(x) - \ell| \geq \epsilon$.

En definitiva, la frase (2) es equivalente a la siguiente:

> "Existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe x que cumple $0 < |x - x_0| < \delta$ y $|f(x) - \ell| \geq \epsilon$". (3)

Un ejemplo aclarará el uso de (3); sea $f: R_{\neq 0} \to R$ la función definida por $f(x) = \text{sen}\, \frac{1}{x}$. Afirmamos que *no* es cierto que $\lim_{x\to x_0} \text{sen}\, \frac{1}{x} = 1$.

Para probarlo, de acuerdo a (3), tenemos que encontrar un $\epsilon > 0$ con la propiedad allí indicada. Tomamos $\epsilon = 1$ y vamos a ver que tiene esa propiedad. En efecto, siendo $x_0 = 0$, hay que probar que para todo $\delta > 0$ hay un $x \neq 0$, con $|x| < \delta$, que verifica $|\text{sen}\, \frac{1}{x} - 1| \geq 1$. Sea entonces $\delta > 0$ y sea $n \in N$ tal que $n > \frac{1}{2\pi\delta}$. Si $x = \frac{1}{2\pi n}$, entonces es $|x| < \delta$, $x \neq 0$, y además:

$$|\text{sen}\, \frac{1}{x} - 1| = |\text{sen}\, 2\pi n - 1| = |0 - 1| = 1 \geq 1$$

lo cual prueba lo afirmado.

Supongamos ahora que f está definida en un intervalo abierto (a, b) salvo quizás en un cierto $x_0 \in (a, b)$ y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión tal que $\lim_{x\to\infty} x_n = x_0$ y $x_n \neq x_0$ para todo $n \in N$. Como $x_0 \in (a, b)$, entonces,

por Proposición 3, existe $n_0 \in N$ tal que $x_n \in (a, b)$ para $n \geq n_0$. Luego, para $n \geq n_0$, está definido $f(x_n)$. Indicamos $(f(x_n))_{n\geq 1}$ a la sucesión que hasta $n_0 - 1$ vale cualquier cosa, y para $n \geq n_0$ vale $f(x_n)$ (como vamos a estudiar el límite de esa sucesión, lo que valga al principio no tiene importancia por ejercicio 6.b. del parágrafo 3.1.).

PROPOSICION 6.8.

Sea f una función definida en (a, b), salvo quizás en $x_0 \in (a, b)$. Entonces es $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *si y sólo si* para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ (con $x_n \neq x_0$ para todo $n \in N$) vale que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

Demostración: Supongamos primero que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$ para todo $n \in N$. Si $\epsilon > 0$ es un número positivo cualquiera, entonces, por definición de límite de una función, existe $\delta > 0$ tal que, para $0 < |x - x_0| < \delta$, es $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Pero a su vez, dado ese $\delta > 0$, por definición de límite de una sucesión, existe $n_0 \in N$ tal que, para $n \geq n_0$, es $|x_n - x_0| < \delta$. Como además es $0 < |x_n - x_0|$ para todo $n \in N$, en particular para $n \geq n_0$, entonces es $0 < |x_n - x_0| < \delta$ para $n \geq n_0$, y por lo tanto $|f(x_n) - \ell| < \epsilon$ para $n > n_0$.

Siendo $\epsilon > 0$ arbitrario, resulta que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

Recíprocamente, supongamos que, para toda sucesión $(x_n)_{n>1}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ y $x_n \neq x_0$ para todo $n \in N$, sea $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$, y probemos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. Si no es así, entonces por (3) existe un $\epsilon > 0$ tal que, cualquiera sea $\delta > 0$, hay un x que cumple $0 < |x - x_0| < \delta$ y $|f(x) - \ell| \geq \epsilon$. Ya que esto vale para todo $\delta > 0$, tomemos $\delta = 1/n$ y sea x_n el correspondiente que cumple $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ y $|f(x_n) - 1| \geq \epsilon$. Entonces claramente es $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ y $x_n \neq x_0$ para todo $n \in N$, pero no es $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ (pues la diferencia entre $f(x_n)$ y ℓ no se puede hacer menor que ϵ). Esto contradice nuestra suposición, luego debe ser $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. ///

Retornemos a la función $f(x) = \text{sen}(1/x)$. Sabemos que no tiene límite 1 cuando $x \to 0$; con la Proposición 6.8. podemos ver que no tiene límite ℓ cuando $x \to 0$ *cualquiera sea* ℓ, o sea *no tiene límite* cuando $x \to 0$. Para verlo, consideramos

$$x_n = (2\pi n)^{-1} \quad \text{y} \quad x'_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1}$$

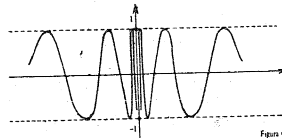


Figura 40

Ya vimos que $f(x_n) = 0$ y es fácil ver que $f(x'_n) = 1$ para todo $n \in N$. Como x_n y x'_n tienden a 0 (son del tipo $1/\infty$), si hubiese límite ℓ de la función, entonces,

por la Proposición 6.8., debería ser simultáneamente $\ell = 0$ y $\ell = 1$, absurdo.

La Proposición 6.8. (más el trabajo hecho en el Capítulo 3) nos permite deducir en forma sencilla otras propiedades del límite:

PROPOSICION 6.9.

Sean f y g funciones definidas en (a, b), salvo quizás en $x_0 \in (a, b)$. Si es:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 > 0$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$$

entonces es:

★ a) $\lim_{x \to x_0} (\ell n\, f(x)) = \ell n\, (\ell_1)$

★ b) $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \ell_1^{\ell_2}$

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración

★ a) Si $(x_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión que tiende a x_0 ($x_n \neq x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$), entonces $(f(x_n))_{n \geq 1}$ tiende a ℓ_1 según 6.8. Luego, por Proposición 3.23.:

$$\lim_{x \to \infty} (\ell n\, f(x_n)) = \ell n\, \ell_1$$

(observar que $\ell n\, f(x_n)$ está definido a partir de un cierto n_0 ya que el límite de $f(x_n)$ es positivo). Como $(x_n)_{n \geq 1}$ es arbitraria, por Proposición 6.8. resulta lo afirmado.

★ b) Si $(x_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión que tiende a x_0 ($x_n \neq x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$), entonces $(f(x_n))_{n \geq 1}$ tiende a ℓ_1 y $(g(x_n))_{n \geq 1}$ tiende a ℓ_2 por Proposición 6.8. Luego, por Proposición 3.26.:

$$\lim f(x_n)^{g(x_n)} = \ell_1^{\ell_2}$$

(aquí también es $f(x_n) > 0$ para $n \geq n_0$, ya que su límite es $\ell_1 > 0$).

Como $(x_n)_{n \geq 1}$ es arbitraria, por Proposición 6.8. resulta lo afirmado. ///

Nuestra última propiedad de límites se refiere a la composición de funciones. Esta es la típica propiedad que uno usa, en la práctica, sin darse cuenta de que la está usando.

PROPOSICION 6.10.

Sea g una función definida en (a, b), salvo quizás en $x_0 \in (a, b)$, tal que:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$$

con $g(x) \neq y_0$ para $x \neq x_0$, y sea f una función definida en un intervalo abierto (c, d) que contiene a y_0, salvo quizás en y_0, tal que:

$$\lim_{y \to y_0} f(y) = \ell$$

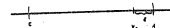
(el nombre que uno le da a la variable no tiene la menor importancia; $\lim_{y \to y_0} f(y)$ es lo mismo que $\lim_{x \to y_0} f(x)$ y que $\lim_{h \to y_0} f(h)$). Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} f \circ g(x) = \ell$$

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración: Ante todo, notemos que f o g está definida en un intervalo abierto que contiene a x_0 (salvo, quizás, en x_0). En efecto, como $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$, entonces para $\epsilon_1 = \min(d - y_0, y_0 - c)$ (ver figuras) existe $\delta_1 > 0$, tal que, si $0 < |x - x_0| < \delta_1$ entonces $|g(x) - y_0| < \epsilon_1$.





Luego:

$$c = y_0 - (y_0 - c) \leq y_0 - \epsilon_1 < g(x) < \\ < y_0 + \epsilon_1 \leq y_0 + d - y_0 = \\ = d$$

o sea $c < g(x) < d$ para $0 < |x - x_0| < \delta_1$. Luego $g(x)$ cae dentro del dominio de definición de f para $x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1$ ($x \neq x_0$).

El resto es sencillo: dado $\epsilon > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que, si $0 < |y - y_0| < \delta'$, entonces $|f(y) - \ell| < \epsilon$; y dado ese $\delta' > 0$, por definición de límite existe $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $0 < |g(x) - y_0| < \delta'$. Luego, para $0 < |x - x_0| < \delta$ es:

$$|f(g(x)) - \ell| < \epsilon$$

y siendo $\epsilon > 0$ arbitrario, queda probada nuestra afirmación. ///

EJERCICIOS

1

Analizar la existencia de los siguientes límites:

◈ *a)* $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$;

◈ *b)* $\lim_{x \to 0} x \,.\, \text{sen} \frac{1}{x}$;

◈ *c)* $\lim_{x \to 0} x^2 \,\text{sen} \frac{1}{x}$;

◈ *d)* $\lim_{x \to 0} \text{sen} \frac{1}{\pi x - \pi}$;

◈ *e)* $\lim_{x \to 0} (x + \text{sen} \frac{1}{x})$.

2

Analizar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

● a) Si existe $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$, entonces existen $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0} g(x)$.

● b) Si existen $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$ y $\lim_{x \to x_0} f(x)$, entonces existe $\lim_{x \to x_0} g(x)$.

● c) Si existe $\lim_{x \to x_0} f(x) \,.\, g(x)$ y existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$, entonces existe $\lim_{x \to x_0} g(x)$.

● d) Si existe $\lim_{x \to x_0} f(x) \,.\, g(x)$ y existe $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq 0$, entonces existe $\lim_{x \to x_0} g(x)$.

e) Si existe $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y existe $\lim_{x\to x_0} g(x)$, entonces éste es distinto de cero.

3

Si $a > 0$, $a \neq 1$ y $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell > 0$, entonces $\lim_{x\to x_0} \log_a f(x) = \log_a \ell$ (usar $\log_a f(x) = \ell n\, f(x)/\ell n\, a$, 6.9.a. y ejercicio 5 del parágrafo 6.1.).

4

Probar que si $\ell = f(y_0)$, entonces la Proposición 6.10. sigue siendo válida si se quita la condición "$g(x) \neq y_0$ para $x \neq x_0$".

6.3.

LIMITES LATERALES

Hasta ahora hemos estudiado el comportamiento de una función $f(x)$ cuando x se acerca a un cierto x_0 y no hemos puesto restricciones sobre la forma en que x se acerca a x_0. Ahora vamos a considerar los casos en que x se acerca a x_0 por la derecha y por la izquierda. Con más precisión:

DEFINICION 6.11.

Sea $x_0 \in R$ y sea f una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto (x_0, a). Decimos que f *tiene límite* ℓ *cuando* x *se acerca a* x_0 *por la derecha*, y escribimos:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$$

si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que vale la siguiente implicación

$$0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Análogamente definimos el límite por la izquierda:

DEFINICION 6.12.

Sea $x_0 \in R$ y sea f una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto (a, x_0). Decimos que f *tiene límite* ℓ *cuando* x *se acerca a* x_0 *por la izquierda*, y escribimos:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$$

si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que vale la siguiente implicación:

$$0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Por ejemplo, consideremos la función $f: R \to R$ definida por:

$$f(x) = [x] \qquad \text{(parte entera de x)}$$

Recordemos la definición de $[x]$: es aquel número *entero* caracterizado por cumplir la doble desigualdad:

$$[x] \leqslant x < [x] + 1$$

Consideremos $x_0 = m \in Z$. Afirmamos que es:

$$\lim_{x\to m^+} [x] = m; \qquad \lim_{x\to m^-} [x] = m - 1$$

(ver figura).

Figura 42

La demostración es muy sencilla: cualquiera sea $\epsilon > 0$, consideremos $\delta = 1$. Entonces, si $0 < x - m < \delta$, resulta $m < x < m + \delta = m + 1$; luego $[x] = m$, con lo cual $|f(x) - m| = |[x] - m| = |m - m| = 0 < \epsilon$. Eso prueba la primera afirmación.

Para la segunda, procedemos igual: cualquiera sea $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = 1$. Entonces, si $0 < m - x < \delta$, resulta $-m < -x < -m + \delta$, de donde $m - \delta < x < m$, es decir, $m - 1 < x < m$. De acuerdo a la definición de parte entera, eso significa que $[x] = m - 1$. Luego $|f(x) - (m-1)| = |[x] - (m-1)| = |m - 1 - (m-1)| = 0 < \epsilon$.

El estudio de la existencia del límite puede reducirse al estudio de la existencia de límites laterales de acuerdo a la siguiente Proposición:

PROPOSICION 6.13.

Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, b), salvo quizas en $x_0 \in (a, b)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

★ a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$

★ b) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración: a) ⇒ b)

Sea $\epsilon > 0$ cualquiera, existe entonces $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

pues estamos suponiendo a) verdadera. Pero entonces:

$$0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

y además:

$$0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow 0 < |x_0 - x| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

lo cual prueba b).

b) ⇒ a)

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario; por b) existen δ_1 y δ_2 tales que:

$$0 < x - x_0 < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon \qquad (4)$$

y

$$0 < x_0 - x < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon \qquad (5)$$

Si $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, entonces $0 < |x - x_0| < \delta$ implica $0 < x - x_0 < \delta$ ó $0 < x_0 - x < \delta$ (según sea $x >$

$> x_0$ ó $x < x_0$). En ambos casos (por ser $\delta \leqslant \delta_1$ y $\delta \leqslant \delta_2$) resulta $|f(x) - \ell| < \epsilon$ por (4) y (5). ///

Volviendo al ejemplo anterior, $f(x) = [x]$, como, para $x_0 = m \in \mathbb{Z}$, los límites laterales eran distintos (eran m y $m - 1$), entonces *no* existe $\lim\limits_{x \to m} [x]$ Para cualquier $x_0 \notin \mathbb{Z}$ existe $\lim\limits_{x \to x_0} [x]$ y es igual a $[x_0]$. (Ejercicio 3).

EJERCICIOS

1

Analizar la existencia, según cual sea x_0, de los siguientes límites:

- a) $\lim\limits_{x \to x_0} (x - [x])$;
- b) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x}{|x|}$;
- c) $\lim\limits_{x \to x_0} |x| + [x]$.

2

Probar que es $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ *si y sólo si, para toda sucesión* $(x_n)_{n \geq 1}$ *tal que* $x_n \to x_0$, $x_n > x_0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *es* $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \ell$.

Enunciar y demostrar una afirmación análoga para el límite por la izquierda.

3

Probar que si $x_0 \notin \mathbb{Z}$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} [x] = [x_0]$.

(SUGERENCIA: cualquiera sea $\epsilon > 0$, tomar $\delta = \min(x_0 - [x_0], [x_0] - x_0 + 1)$).

6.4. LIMITES INFINITOS

Vamos a ampliar un poco el estudio del límite, considerando la posibilidad de que la variable x o la función $f(x)$ o ambas crezcan más allá de todo límite. Damos primero las definiciones precisas de estos conceptos.

DEFINICION 6.14.

Sea f definida en (a, b), salvo quizás en $x_0 \in (a, b)$.

Decimos que $f(x)$ *tiende a* $+\infty$ *cuando* x *tiende a* x_0, y escribimos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

si cualquiera sea el número real $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

****

DEFINICION 6.15.

Sea f como en 6.14. Decimos que $f(x)$ *tiende a* $-\infty$ *cuando* x *tiende a* x_0, y escribimos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

si, en el sentido de la Definición 6.14., es $\lim\limits_{x \to x_0} (-f(x)) = +\infty$.

****

DEFINICION 6.16.

Sea f como en 6.14. Decimos que $f(x)$ *tiende a* ∞ *cuando* x *tiende a* x_0, y escribimos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

si, en el sentido de la Definición 6.14., es $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

****

Es fácil ver que tanto la definición 6.14. como la 6.15. implican la 6.16.

Veamos un ejemplo; afirmamos que es:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3 + x} = \infty$$

Para ello, sea $M > 0$ arbitrario; queremos ver que se puede hacer que $\left| \dfrac{1}{x^3 + x} \right| > M$. Eso equivale a $|x^3 + x| < M^{-1}$, pero despejar x de aquí es complicado. Apelamos entonces al habitual procedimiento de acotación: tomamos $\delta' = 1$ y entonces, si $0 < |x| < 1$, en particular $-1 < x < 1$, luego:

$$0 < x^2 + 1 < 2$$

Luego $|x^2 + 1| < 2$ y por lo tanto:

$$|x^3 + x| = |x(x^2 + 1)| = |x||x^2 + 1| < 2|x|$$

y ahora despejar x de $2|x| < M^{-1}$ es fácil (resulta $|x| < \dfrac{1}{2M}$). Tomando entonces

$$\delta = \min\left(1, \frac{1}{2M}\right)$$

resulta, para $0 < |x| < \delta$:

$$|x^3 + x| = |x||x^2 + 1| < \quad \text{(por ser } \delta \leqslant 1)$$
$$< |x| . 2 < \quad \left(\text{por ser } \delta \leqslant \frac{1}{2M}\right)$$
$$< \left(\frac{1}{2M}\right) . 2 = \frac{1}{M}$$

y entonces, para $0 < |x| < \delta$, resulta $|f(x)| = \dfrac{1}{|x^3 + x|} > M$, lo que demuestra lo afirmado.

Notemos que esta función no cumple con la Definición 6.14. ni con la 6.15., ya que por la izquierda tiende a $-\infty$ y por la derecha a $+\infty$. El enunciado preciso de lo que quiere decir ésto lo damos ahora:

DEFINICION 6.17.

Sea f una función definida en todos los puntos de un intervalo (x_0, a). Decimos que $f(x)$ *tiende a* $+\infty$ *cuando* x *tiende a* x_0 *por la derecha,* y escribimos:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

si, cualquiera sea $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

****

DEFINICION 6.18.

Sea f una función definida en todos los puntos de un intervalo (a, x_0). Decimos que $f(x)$ *tiende a* $+\infty$ *cuando* x *tiende a* x_0 *por la izquier-*

da si, dado $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$-\delta < x_0 - x < 0 \Rightarrow f(x) > M$$

En este caso escribimos:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

DEFINICION 6.19.

Igual que antes, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ significa $\lim_{x \to x_0^+} (-f(x)) = +\infty$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ significa $\lim_{x \to x_0^-} (-f(x)) = +\infty$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ significa $\lim_{x \to x_0^+} |f(x)| = +\infty$ y $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$ significa $\lim_{x \to x_0^-} |f(x)| = +\infty$.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Veamos un ejemplo; afirmamos que es:

$$\lim_{x \to 0^+} \ell n\, x = -\infty \qquad (6)$$

Esto significa que $\lim_{x \to 0^+} (-\ell n\, x) = +\infty$, o sea que, dado $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que vale la siguiente implicación: $0 < x < \delta \Rightarrow -\ell n\, x > M$. Sea entonces $M > 0$ y consideremos $\delta = e^{-M}$. Si $0 < x < \delta$, como ℓn es creciente (ejercicio de 3.), entonces es:

$$\ell n\, x < \ell n\, \delta$$

o sea

$$\ell n\, x < \ell n\, e^{-M} = -M$$

de donde, multiplicando por -1:

$$-\ell n\, x > M$$

Siendo $M > 0$ arbitrario, resulta así la verdad de nuestra afirmación.

Nos falta considerar el caso en que la variable x tiende a ∞. Previamente, una cuestión de notación; indicaremos:

$$(-\infty, a) = [x \in \mathbb{R}: x < a]$$

$$(a, +\infty) = [x \in \mathbb{R}: a < x]$$

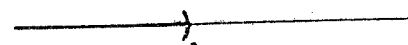




Figura 42 b

DEFINICION 6.20.

Sea f definida en todos los puntos de $(a, +\infty)$ en a) y b), en $(-\infty, b)$ en c) y d) y en ambos en e) y f).

- a) Se dice que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si, dado $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que vale la siguiente implicación: $x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

- b) Se dice que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si, dado $K > 0$, existe $M > 0$ tal que vale la siguiente implicación: $x > M \Rightarrow f(x) > K$.
- c) Se dice que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ si, dado $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que vale la siguiente implicación: $x < -M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.
- d) Se dice que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si, dado $K > 0$, existe $M > 0$ tal que vale la siguiente implicación: $x < -M \Rightarrow f(x) > K$.
- e) Se dice que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$ si, dado $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que vale la siguiente implicación: $|x| > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.
- f) Se dice que $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ si, dado $K > 0$, existe $M > 0$ tal que vale la siguiente implicación: $|x| > M \Rightarrow f(x) > K$.
- g) En la notación b) d) y f), $\lim f(x) = -\infty$ significa $\lim (-f(x)) = +\infty$, y $\lim f(x) = \infty$ significa $\lim |f(x)| = +\infty$.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Veamos algunos ejemplos de aplicación de estos conceptos.

Ya vimos antes que $\lim_{x \to 0^+} \ell n\, x = -\infty$; ahora vamos a probar que:

$$\lim_{x \to +\infty} \ell n\, x = +\infty \qquad (7)$$

Para ello, sea $K > 0$; tenemos que encontrar un $M > 0$ tal que, para $x > M$ sea $\ell n\, x > K$. Tomamos $M = e^K$; entonces, si $x > M$:

$$\ell n\, x > \ell n\, M = \ell n\, e^K = K\, \ell n\, e = K$$

De acuerdo a 6.20.b., esto prueba nuestra afirmación.

Sea ahora $a > 1$ y probemos las siguientes afirmaciones:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \qquad (8)$$

$$(a > 1)$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \qquad (9)$$

Para la primera, dado $K > 0$ consideremos $M = \log_a K$. Entonces, si $x > M$:

$$a^x > a^M = a^{\log_a K} = K.$$

Para la segunda, sea $\epsilon > 0$ y consideremos $M = -\log_a \epsilon$. Entonces, si $x < -M = \log_a \epsilon$ resulta:

$$a^x < a^{-M} = a^{\log_a \epsilon} = \epsilon$$

Como regla mnemotécnica, los resultados anteriores se escriben así:

$$\ell n\, 0 = -\infty$$

$$\ell n\, (+\infty) = +\infty$$

$$a^{+\infty} = +\infty \qquad (a > 1)$$

$$a^{-\infty} = 0 \qquad (a > 1)$$

y debe recordarse lo que en realidad quieren decir: las igualdades (6), (7), (8) y (9).

EJERCICIOS

1

Probar las siguientes afirmaciones:

♦ a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x+x^2} = \infty$;

♦ b) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2+x^4} = +\infty$;

♦ c) $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{|x|} = -\infty$;

♦ d) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$;

♦ e) $\lim_{x\to 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$;

♦ f) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1} = \infty$

2

Probar que si $0 < a < 1$, *entonces*

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0; \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

(Esto se puede recordar escribiendo $a^{+\infty} = 0$, $a^{-\infty} = +\infty$ *para* $0 < a < 1$, *pero insistimos en que sólo es una regla mnemotécnica).*

3

★ a) Probar que si $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ y $\lim_{y\to\infty} f(y) = \ell$, entonces $\lim_{x\to x_0} (f\circ g)(x) = \ell$.

★ b) Probar que si $\lim_{x\to\infty} g(x) = y_0$ y $\lim_{y\to y_0} f(y) = \ell$, entonces $\lim_{x\to\infty} (f\circ g)(x) = \ell$.

★ c) Probar que si $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim_{y\to\infty} f(y) = \infty$, entonces $\lim_{x\to\infty} (f\circ g)(x) = \infty$.

★ d) Probar que $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ si y solo si $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \infty$ (se supone $g(x) \neq 0$ para $x \neq x_0$).

★ e) Probar que si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \neq 0$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \infty$.

★ f) Probar que si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \infty$.

4

Probar que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ si y sólo si, para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que $\lim x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$ para $n \in \mathbb{N}$, es $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

5

Enunciar y demostrar Proposiciones que relacionen límite de funciones con límite de sucesiones (como en el ejercicio 4) correspondientes a las Definiciones 6.14., 6.15., 6.17., 6.18., 6.19. y 6.20.

6

▲ a) Probar que $\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$. (SUGERENCIA: usar ejercicio previo y el resultado análogo para sucesiones del parágrafo 3).

▲ b) Probar que $\lim_{x\to\infty} (1+\frac{K}{x})^x = e^K$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

▲ c) Probar que si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to x_0} (1+\frac{1}{f(x)})^{f(x)} = e$.

▲ d) Probar que si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{f(x)})^{f(x)} = e$.

▲ e) Probar que si $\lim_{x\to x_0} f(x) = a > 1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty$.

▲ f) Probar que si $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ con $0 < a < 1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 0$.

▲ g) Probar que si $a > 1$, $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ (SUGERENCIA: $\log_a x = \frac{\ell n\, x}{\ell n\, a}$ y ejercicio 3.e.). Probar también que $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$.

▲ h) Probar que si $0 < a < 1$, $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = 0$ y $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$.

7

Analizar la existencia de los siguientes límites:

■ *a)* $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$;

■ *b)* $\lim_{x\to\infty} \cos x$;

■ *c)* $\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$;

■ *d)* $\lim_{x\to\infty} x\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$;

■ *e)* $\lim_{x\to 0} \frac{|x|-x}{|x|+x}$;

■ *f)* $\lim_{x\to 0} x\cdot[x]$;

■ *g)* $\lim_{x\to 0} x\cdot[\frac{1}{x}]$.

8

Calcular los siguientes límites (finitos o infinitos; las técnicas son como en parágrafo 3.3.):

● a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x-1}{2x^3-3x+4}$ (dividir por x^3);

● b) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x}{x^3+1}$;

● c) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4+2x-3}{4x^3+1}$;

● d) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2+x^{5/3}}{3x+x^{1/5}}$;

f) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+x^{3/4}}{x^{1/3}+x^{2/3}}$;

g) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x+2} - \dfrac{x^2+1}{x-2}$;

h) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}$;

i) $\lim_{x\to+\infty} x^2-2x$;

j) $\lim_{x\to-\infty} 2x^2+6x$;

k) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

l) $\lim_{x\to\infty} x\,(x-\sqrt{2x^2+3}\,)$;

m) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x)$;

n) $\lim_{x\to\infty} x+\sqrt[3]{1-x^3}$;

o) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{2x}$;

p) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^2+5}{x^2+1}\right)^{3x^2+1}$;

q) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+4}{x+6}\right)^{x^2}$;

r) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{x^3}$

6.5.

FUNCIONES CONTINUAS

DEFINICION 6.21.

Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, b) y sea $x_0 \in (a, b)$.

Decimos que f es *continua en* x_0 si:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

De acuerdo con la definición de límite, la continuidad de f en x_0 se puede escribir así: *dado* $\epsilon > 0$ *existe un correspondiente* $\delta > 0$ *tal que, si* $|x-x_0|<\delta$, *entonces* $|f(x)-f(x_0)| < \epsilon$. (Obsérvese que aquí no hace falta poner $0<|x-x_0|<\delta$, ya que para $x = x_0$ es obviamente $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$).

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

La continuidad de f en x_0 significa tres cosas:

a) Existe (y es finito) $\lim_{x\to x_0} f(x)$

b) Está definido $f(x_0)$ (o sea, x_0 pertenece al dominio de f).

c) Los números dados por a) y b) ($\lim_{x\to x_0} f(x)$ y $f(x_0)$) son iguales.

Entonces hay tres maneras de que una función f *no* sea continua en x_0:

1. Si no existe (o es infinito) $\lim_{x\to x_0} f(x)$

Por ejemplo, la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

no es continua en $x_0 = 0$ pues $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$.

Otro ejemplo lo tenemos en la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

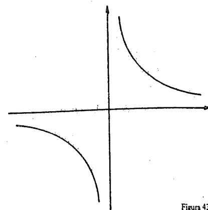


Figura 43

definida por $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f(x) = 1$. Esta función no es continua en $x_0 = 0$ pues no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

2. Si f no está definida en x_0

Por ejemplo, la función $f: \mathbb{R}_{\neq 1} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x$$

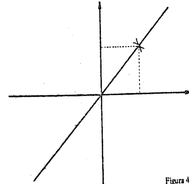


Figura 44

no es continua en $x_0 = 1$ pues no está definida allí (desde luego, se la podría definir en 1 de manera que resulte continua, pero tal como la tenemos *no* está definida en $x_0 = 1$ y por lo tanto no es continua allí).

3. Si existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y está definida $f(x_0)$ pero no coinciden

Por ejemplo, la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

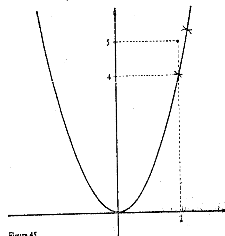


Figura 45

no es continua en $x_0 = 2$, ya que, como el lector puede verificar:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \neq 5 = f(2)$$

Es importante notar que lo que hemos definido es la continuidad *en un punto;* que una función sea continua en un conjunto (por ejemplo, que sea continua en [a. b]) significará que es continua en cada uno de los puntos de dicho conjunto. En particular, *si f es continua en todos los puntos de su dominio, diremos simplemente que f es continua.*

Cuando una función no es continua en un punto se dice que es *discontinua* en ese punto. Hay una clasificación de las discontinuidades que queremos mencionar: i) se dice que una discontinuidad en x_0 es *evitable* si existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$; al ser discontinua y existir ese límite, entonces o bien no estará definido $f(x_0)$ o bien estará definido y será distinto de ese límite. La palabra "evitable" se debe a que definiendo, o redefiniendo, f en x_0 como el límite en cuestión, la función pasa a ser continua en x_0, "evitándose" así la discontinuidad; ii) se dice que la discontinuidad en x_0 es de *primera especie* si existen, y son distintos, los límites laterales en x_0, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ (por ejemplo, $f(x) = [x]$ tiene discontinuidades de primera especie en los enteros); iii) por último, la discontinuidad en x_0 es de *segunda especie* en cualquier otro caso (por ejemplo, $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ en $x_0 = 0$).

La mayoría de las funciones que hemos visto hasta ahora son continuas en su dominio de definición, cosa que quedará establecida con las Proposiciones que vamos a demostrar en este parágrafo.

Si f y g son dos funciones, indicaremos por $f + g$ la función $x \to f(x) + g(x)$, por $f \, . \, g$ a la función $x \to f(x) \, . \, g(x)$, y por f/g a la función $x \to f(x) / g(x)$. Claramente, $f + g$ y $f \, . \, g$ tienen como dominio la intersección de los dominios de f y de g, mientras que el dominio de f/g se obtiene sacando, además, los puntos x en los que sea $g(x) = 0$.

PROPOSICION 6.22.

a) Sea f continua en x_0. Si $a < f(x_0) < b$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para $|x - x_0| < \delta$, es $a < f(x) < b$.

b) Si f y g son continuas en x_0, entonces $f + g$ y $f \, . \, g$ son continuas en x_0. Si además $g(x_0) \neq 0$, entonces f / g es continua en x_0.

c) Si g es continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en x_0.

Demostración

a) Inmediato considerando $\ell = f(x_0)$ en la Proposición 6.3.

b) Inmediato considerando $\ell_1 = f(x_0)$ y $\ell_2 = g(x_0)$ en las Proposiciones 6.5., 6.6. y 6.7.

c) Inmediato considerando $y_0 = g(x_0)$ y $\ell = f(g(x_0))$ en la Proposición 6.10. ///

PROPOSICION 6.23.

a) La función ℓn: $R_{>0} \to R$ es continua.

b) Si $a > 0$, la *función exponencial* de R en R dada por

$$f(x) = a^x$$

es continua.

Demostración

a) Inmediato considerando $\ell_1 = x_0$ en Proposición 6.9.a. para cada $x_0 \in R$.

b) Inmediato considerando f como la función constante, $f(x) = a$ para todo $x \in R$, g como la función dada por $g(x) = x$ para todo $x \in R$, $\ell_1 = a$ y $\ell_2 = x_0$ en Proposición 6.9.b. para cada $x_0 \in R$. ///

PROPOSICION 6.24.

Toda función polinómica es continua. Una función racional (cociente de funciones polinómicas) es continua en todos los puntos en donde el denominador es distinto de cero.

Demostración: La función $f(x) = x$ es continua (inmediato); luego, por 6.22.b., la función $g(x) = x^2 = x \, . \, x$ es continua (producto de continuas). Inductivamente vemos que la función $f(x) = x^n$ es continua cualquiera sea $n \in N$. La función constante es continua (inmediato). Luego, por 6.22.b., la función $f(x) = a x^n$ es continua cualquiera sea $n \in N$ y cualquiera sea $a \in R$. Entonces toda función polinómica es continua, ya que es suma de funciones del tipo $f(x) = a x^n$.

La continuidad de las funciones racionales en los puntos en donde el denominador es distinto de cero es consecuencia inmediata de lo que acabamos de probar y de 6.22.b. ///

Como ejemplo, estudiemos la continuidad de la función f: $R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si} \quad x > 2 \\ 3 & \text{si} \quad x = 2 \\ x^3 - 4 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

Consideremos primero $x_0 = 2$; para ver si existe $\lim_{x \to 2} f(x)$, estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = $$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2}$$

Como para $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ no interesa cuánto vale f en $x = 2$, en la expresión anterior podemos simplificar $x - 2$ y resulta:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x + 2$$

Como $g(x) = x + 2$ es polinomial, es $\lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$. En particular es $\lim_{x \to 2^+} x + 2 = 4$. Luego $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$.

El otro límite lateral es más fácil de calcular: como $h(x) = x^3 - 4$ es polinomial, entonces $\lim_{x \to 2} x^3 - 4 = 2^3 - 4 = 4$. En particular, $\lim_{x \to 2^-} x^3 - x = 4$ o sea, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$.

Como los límites laterales coinciden, resulta $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$, y como $f(2) = 3 \neq \lim_{x \to 2} f(x)$, entonces f tiene una discontinuidad evitable en $x_0 = 2$ (si redefinimos $f(2) = 4$, la función f resulta continua en $x_0 = 2$).

En cualquier $x_0 \neq 2$ hay un intervalo abierto alrededor de x_0 en el cual f es polinomial (si $x_0 < 2$) o racional (si $x_0 > 2$). Luego $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ya que

las funciones racionales son continuas (ver Ejercicio 2 del parágrafo 6.1.). Entonces f es continua en cualquier $x_0 \neq 2$.

Pasemos ahora a estudiar la continuidad de las funciones trigonométricas. Como la definición de dichas funciones que hemos dado es geométrica, deberemos también utilizar algo de geometría para estudiar su continuidad.

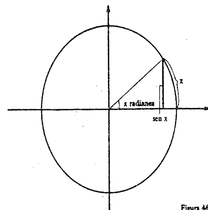


Figura 46

Comencemos con la función $f(x) = \operatorname{sen} x$; como $\operatorname{sen} x$ está medido por el segmento vertical indicado en la figura y x mide el arco subtendido (por haber utilizado radianes para medir ángulos y, consecuentemente, definir $\operatorname{sen} x$ para $x \in \mathbb{R}$); entonces es evidentemente $\operatorname{sen} x \leqslant x$ para $x \geqslant 0$ (para $x < \frac{\pi}{2}$, lo muestra la figura; para $x \geqslant \frac{\pi}{2}$ es cierto porque el sen x siempre es $\leqslant 1$). Si $x < 0$, entonces $-x < 0$ y, por lo tanto, $\operatorname{sen}(-x) \leqslant -x$. Como $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, resulta $-\operatorname{sen} x \leqslant -x$. Ambas desigualdades se pueden escribir en una:

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant |x| \qquad (10)$$

La desigualdad (10) es todo lo que necesitamos, además de las propiedades ya conocidas, para estudiar la continuidad de la función seno.

En efecto, por Ejercicio 3.j. del Apéndice al Capítulo 5:

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| = |2 \cos \frac{x + x_0}{2} \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2}| =$$

$$= 2 \left|\cos \frac{x + x_0}{2}\right| \left|\operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant$$

(ya que $|\cos y| \leqslant 1$ cualquiera sea y)

$$\leqslant 2 \left|\operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant \quad \text{(por (10))}$$

$$\leqslant 2 \left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0|$$

lo cual muestra que $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$ (Basta tomar $\delta = \epsilon$). Como x_0 es cualquier número real, entonces *la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es continua.*

De la misma manera, usando el Ejercicio 3.k. del Apéndice al Capítulo 5, resulta que *la función $f(x) = \cos x$ es continua.*

Ahora la continuidad de las demás funciones trigonométricas es fácil de estudiar. Las funciones $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ son continuas en todo x_0 en el cual sea $\cos x_0 \neq 0$, es decir en todo $x_0 \in \mathbb{R}$ salvo en los de la forma $x_0 = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$; análogamente, las funciones $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ y $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ son continuas en todo $x_0 \in \mathbb{R}$, salvo en los ceros de $\operatorname{sen} x$, que son los de la forma $n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Como último ejemplo, estudiemos la continuidad de la función $f: \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Afirmamos que es:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad (11)$$

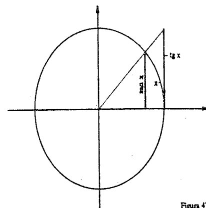


Figura 47

Para ver que es así, notemos que, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, es:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

Luego, dividiendo por $\operatorname{sen} x$:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

Haciendo $x \to 0^+$, resulta que el miembro izquierdo tiende a $\cos 0 = 1$ (por la continuidad del coseno) y el miembro derecho es constantemente 1. Luego:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Para $x < 0$, observando que $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x}$, resulta $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

En definitiva, $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiene una discontinuidad evitable en $x_0 = 0$, que se evita definiendo $f(0) = 1$.

EJERCICIOS

1

Probar, usando sólo la definición, que las siguientes funciones son continuas:

- *a)* $f(x) = |3x + 1|$;
- *b)* $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$;
- *c)* $f(x) = x^2$

2

Una función f definida en $[x_0, a)$ se dice *continua por la derecha en x_0* si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Si f está definida en $(b, x_0]$, se dice *continua por la izquierda en x_0* si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

a) Demostrar que $f: \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, es continua en cualquier $x_0 > 0$ y continua a la derecha en $x_0 = 0$.

b) Estudiar la continuidad a izquierda y a derecha de $f(x) = [x] - x$.

3

Sea f continua en x_0 y sea g una función tal que $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = x_0$. Probar que $\lim\limits_{x \to \infty} f \circ g(x) = f(x_0)$.

Análogamente si en lugar de ∞ ponemos $+\infty$ o $-\infty$.

4

Probar que las siguientes funciones son continuas mostrando que son composición de funciones continuas:

★ *a)* $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x^4 + 1}$;

★ *b)* $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1}$;

★ *c)* $f(x) = 3^{\frac{x-1}{x^2+3}}$;

★ *d)* $f(x) = \sqrt{|\operatorname{sen}(x+2)|}$

5

Probar que si f y g son continuas en x_0 y $f(x_0) > 0$, entonces la función $x \to f(x)^{g(x)}$ es continua en x_0.

6

Estudiar la continuidad en cada $x_0 \in \mathbb{R}$ de las siguientes funciones:

■ *a)* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$;

■ *b)* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

■ *c)* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4} & \text{si } x > 3 \\ 2 - x^2 & \text{si } x \leqslant 3 \end{cases}$

■ *d)* $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x > 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

■ *e)* $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x^2 - 9}$;

■ *f)* $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x^2} - 1}$

■ *g)* $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$;

■ *h)* $f(x) = \dfrac{4 - \sqrt{6+x}}{2 - \sqrt{x-2}}$.

7

Calcular los siguientes límites:

● a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{\dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}}$

● b) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{\dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9}}$

● c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$

● d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}}$

● e) $\lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{2-x} - [x+1]$

● f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$

● g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$

● h) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$

● i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x^2 + \sqrt{x}}$

● j) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos x}{x - \pi/2}$

● k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{3x}$

● l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$

● m) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

● n) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x+1) - \ln(x+2))$

● o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1 + e^x)}{x}$

● p) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(1 + e^x)}{x}$

● q) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

● r) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$

● s) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

● t) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 (\ln(x^2 + 4) - \ln x^2)$

8

Sea f una función continua definida en $(-\infty, a]$ (en a, continua a la izquierda) y en $[b, +\infty)$ (en b, continua a la derecha) $(a < b)$. Mostrar que f se puede extender a una función continua definida en todo R.

(SUGERENCIA: completar el trecho desde a hasta b con la función lineal h tal que $h(a) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ y $h(b) = \lim\limits_{x \to b^+} f(x)$).

6.6.

FUNCIONES CONTINUAS EN UN INTERVALO CERRADO

Consideraremos en este parágrafo funciones f que sean continuas en todos los puntos de un intervalo *cerrado* $[a, b]$. Observemos que, por la definición de continuidad, f debe estar definida en un intervalo ***abierto*** (c, d) que contenga a $[a, b]$ (sino, no se puede hablar de continuidad en a o en b; a lo sumo se podría hablar de continuidad a derecha y a izquierda respectivamente. Ver Ejercicio 1).

Las funciones continuas en intervalos cerrados tienen tres propiedades muy importantes. Para establecer la primera, digamos previamente que una función $f: A \to \mathbb{R}$ (con $A \subset \mathbb{R}$) se dice ***acotada*** si existen números reales m y M tales que $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para todo $x \in A$. En otras palabras, $f: A \to \mathbb{R}$ es acotada si la imagen de f, $\operatorname{Im}(f) = \{f(x) : x \in A\}$, es un conjunto acotado inferiormente y superiormente, en el sentido dado en el parágrafo 1.8.

TEOREMA 6.25.

Una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ es acotada en $[a, b]$.

Demostración: Sea f continua y supongamos que f *no* es acotada. Eso significa que o bien no es acotada inferiormente o bien no es acotada superiormente; entonces dado $M > 0$ existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) > M$ y para cada $M > 0$ podemos conseguir un x, por lo menos, con esa propiedad.

Consideremos entonces $M = n \in \mathbb{N}$ y sea x_n el correspondiente $x \in [a, b]$ tal que $f(x_n) > n$. Haciendo esto para cada número natural n, obtenemos una sucesión $(x_n)_{n \geqslant 1}$ *contenida en* $[a, b]$ tal que $f(x_n) > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $(x_n)_{n \geqslant 1}$ es una sucesión contenida en un intervalo cerrado, entonces, en particular, $(x_n)_{n \geqslant 1}$ es una sucesión acotada. Luego, por el Teorema de Weierstrass (Teorema 3.30.), $(x_n)_{n \geqslant 1}$ contiene una subsucesión convergente $(x_{n_k})_{k \geqslant 1}$, es decir, existe:

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = c$$

Como $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (pues lo propio ocurre para *todo* x_n), entonces $a \leqslant \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} \leqslant b$

Luego $c \in [a, b]$ y, en particular, está definido $f(c)$. Por ser f continua, entonces:

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(c)$$

Pero entonces $(f(x_{n_k}))_{k \geqslant 1}$ es una sucesión *convergente;* como $f(x_{n_k}) > n_k \geqslant k$, entonces $(f(x_{n_k}))_{k \geqslant 1}$ es una sucesión *no acotada.*

Estas dos cosas son incompatibles en vista de la Proposición 3.4. Hemos llegado así a una contradicción por suponer que f no es acotada superiormente en $[a, b]$. Una contradicción similar se puede conseguir si se supone que f no es acotada inferiormente en $[a, b]$. Luego f es acotada en $[a, b]$. ///

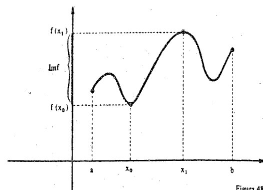


Figura 48

Al ser acotada la imagen de f, entonces $\mathrm{Im}(f)$ tiene ínfimo y un supremo. Ese ínfimo y supremo son, respectivamente, un *mínimo* y un *máximo* (siempre para funciones continuas en un intervalo cerrado). En otras palabras, existen x_0 y x_1 en $[a, b]$ con la propiedad de que $f(x_0) \leqslant f(x)$ para todo $x \in [a, b]$ y $f(x_1) \geqslant f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Esto se suele decir en la siguiente forma: f *alcanza un máximo y un mínimo* en $[a, b]$. La demostración de esta afirmación es nuestro segundo Teorema sobre funciones continuas en un intervalo cerrado:

TEOREMA 6.26.

Toda función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ alcanza un máximo y un mínimo en $[a, b]$.

Demostración: Al ser f continua en $[a, b]$, el conjunto:

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

es acotado (inferior y superiormente) por el Teorema 6.25. Existen entonces:

$$m = \inf \mathrm{Im}(f)$$
$$M = \sup \mathrm{Im}(f)$$

Probemos primero que existe $x_1 \in [a, b]$ tal que $f(x_1) = M$. En efecto, si no fuese así, si no existe tal x_1, consideremos la función:

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

Por Proposición 6.22.b., g es continua en $[a, b]$ (el numerador es continuo por ser una función constante, el denominador es continuo por ser diferencia de funciones continuas y nunca es cero por lo que hemos supuesto). Pero entonces, por el Teorema 6.25., g es acotada. En particular, existe $K > 0$ tal que

$$\frac{1}{M - f(x)} \leqslant K \qquad \text{para todo } x \in [a, b]$$

De aquí deducimos inmediatamente:

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{K} \qquad \text{para todo } x \in [a, b]$$

Pero entonces resultaría que $M - \frac{1}{K}$ es cota superior de $\mathrm{Im}(f)$; como $M - \frac{1}{K} < M$, esto es una contradicción (el supremo, por definición, es la *menor* cota superior). Esta contradicción proviene de suponer que no existe $x_1 \in [a, b]$ tal que $f(x_1) = M$; luego existe $x_1 \in [a, b]$ que verifica $f(x_1) = M$. Siendo M supremo, eso implica $f(x_1) \geqslant f(x)$ para todo $x \in [a, b]$ (pues el supremo es, en particular, cota superior).

Razonando análogamente con la función:

$$h(x) = \frac{1}{f(x) - m}$$

se prueba que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = m$, y, por lo tanto, $f(x_0) \leqslant f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Antes de ver el próximo Teorema, conviene hacer algunas observaciones.

La idea original, intuitiva, geométrica, de una función continua, es la de una función cuya representación gráfica se pueda hacer sin levantar la lapicera, es decir, que en la representación gráfica no haya "saltos" (como los que tiene la función $f(x) = [x]$) ni puntos en donde la función se vaya al infinito (como $f(x) = \frac{1}{x}$ en el cero).

Para poder trabajar con este tipo de funciones conviene dar una definición más precisa del concepto de continuidad, que se aproxime lo más posible a la idea intuitiva de función cuya representación gráfica se puede dibujar sin levantar la lapicera. En este contexto, la Definición 6.21. parece bastante ajustada, pues las funciones que uno dibuja levantando la lapicera no satisfacen esa definición.

Pero en realidad esa definición incluye como con-

tinuas a funciones sumamente complicadas (todavía no se ha inventado la lapicera que pueda dibujar la "función de Weierstrass", que veremos en el último capítulo), así que no se ajusta totalmente a la idea intuitiva original.

Es por eso que el próximo Teorema requiere una demostración formal, no por una manía de demostrar todo, hasta lo obvio, sino porque el Teorema no es evidente si "función continua" significa una función que satisface la Definición 6.21. (aunque sí sería evidente si "función continua" significase lo de la lapicera que no se levanta).

TEOREMA 6.27.

Sea f una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Demostración: Lo que este teorema afirma es que si un punto de la gráfica de una función continua está por debajo del eje de abscisas y otro está por encima, entonces dicha gráfica debe cortar al eje de abscisas en algún punto.

Para demostrarlo, consideremos el conjunto

$$A = \{x \in [a, b]: f(x) < 0\}$$

Este conjunto está acotado superiormente por b (si $x \in A$, en particular $x \in [a, b]$, luego $x \leqslant b$) y es no vacío (pues al ser $f(a) < 0$, $a \in A$). Entonces existe:

$$c = \sup A$$

Es claro que $c \in [a, b]$ (pues $A \subset [a, b]$).

Afirmamos que $f(c) = 0$; para probarlo, descartemos las posibilidades $f(c) < 0$ y $f(c) > 0$.

Si es $f(c) < 0$, entonces, por Proposición 6.22.a., existe $\delta > 0$ tal que, para $c - \delta < x < c + \delta$, es $f(x) < 0$. Sea x_1 un número cualquiera entre c y $c + \delta$, $c < x_1 < c + \delta$. Entonces es $f(x_1) < 0$, con lo cual $x_1 \in A$, y x_1 es más grande que el supremo de A, absurdo.

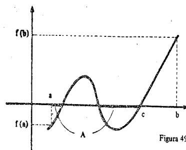


Figura 49

Si es $f(c) > 0$, nuevamente por 6.22.a., existe $\delta > 0$ tal que, para $c - \delta < x < c + \delta$, es $f(x) > 0$. Sea x_2 cualquier número entre $c - \delta$ y c, $c - \delta < x_2 < c$. Entonces x_2 no puede ser cota superior de A (ya que $x_2 < c$ y c es la *menor* cota superior); luego debe existir $x_3 \in A$ tal que $x_2 < x_3 \leqslant c$. Pero en ese caso sería $f(x_3) > 0$ por estar x_3 en $(c - \delta, c + \delta)$ y $f(x_3) < 0$ por estar x_3 en A, absurdo.

En definitiva, no puede ser $f(c) < 0$ ni $f(c) > 0$, luego $f(c) = 0$. Es claro que $c \in [a, b]$ (pues $A \subset [a, b]$) $c \neq a$, $c \neq b$ (pues $f(c) = 0$; $f(a) < 0$, $f(b) > 0$), luego $c \in (a, b)$.

COROLARIO 6.28.

(TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO)

Sea f una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a) < f(b)$. Si d es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, $f(a) < d < f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Demostración: Basta aplicar el Teorema 6.27. a la función $g(x) = f(x) - d$.

El último resultado de este parágrafo resulta útil para probar la continuidad de algunas funciones:

TEOREMA 6.29.

(CONTINUIDAD DE LA FUNCION INVERSA)

Si f es una función continua en $[a, b]$ y estrictamente creciente (o estrictamente decreciente) en $[a\ b]$, entonces:

- i) $f: [a, b] \to [f(a), f(b)]$ es biyectiva
- ii) $f^{-1}: [f(a), f(b)] \to (a, b)$ es continua

Demostración: Supongamos que f es estrictamente creciente (para f estrictamente decreciente se procede en forma análoga).

i) f es inyectiva, pues si $x_1 \neq x_2$, digamos $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$ por ser f estrictamente creciente, en particular $f(x_1) \neq f(x_2)$. f es suryectiva, pues dado $d \in (f(a), f(b))$, el Corolario 6.28. nos asegura que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

ii) Ya que f es biyectiva f tiene una función inversa f^{-1}: $(f(a), f(b) \to (a, b)$; veamos que f^{-1} es continua en cada $d \in (f(a), f(b))$.

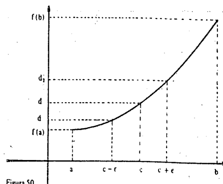


Figura 50

Para ello, sea $d \in (f(a), f(b))$ y sea $\epsilon > 0$. Al ser f suryectiva, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$. Sean $d_1 = f(c - \epsilon)$, $d_2 = f(c + \epsilon)$ y sea:

$\delta = \min(d_2 - d, d - d_1)$ (luego $\delta \leqslant d_2 - d$ y $\delta \leqslant d - d_1$) (*)

Queremos probar que $|y - d| < \delta$ implica $|f^{-1}(y) - f^{-1}(d)| < \epsilon$. Para ello, sea y tal que $|y - d| < \delta$, o sea $d - \delta < y < d - \delta$.

Como f es suryectiva, existe $c' \in (a, b)$ tal que $f(c') = y$.

Siendo $d - \delta < y < d + \delta$, por (*) es $d_1 < y < d_2$, o sea:

$$f(c - \epsilon) < f(c') < f(c + \epsilon)$$

Como f es estrictamente creciente, entonces debe ser:

$$c - \epsilon < c' < c + \epsilon$$

o sea $|c' - c| < \epsilon$. Pero $c' = f^{-1}(y)$, $c = f^{-1}(d)$; luego:

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(d)| < \epsilon$$

que es lo que queríamos demostrar.

EJERCICIOS

1

a) Si $f: [a, b] \to R$ es continua en (a, b), continua por la izquierda en b y continua por la derecha en a (o sea, $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$), entonces existe un intervalo abierto (c, d) tal que $[a, b] \subset (c, d)$ y una función $g: (c, d) \to R$ continua con la propiedad de ser $g(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

(SUGERENCIA: tomar $c = a - 1$, $d = b + 1$ y definir $g(x) = f(a)$ para $x \in (c, a)$, $g(x) = f(x)$ para $x \in [a, b]$ y $g(x) = f(b)$ para $x \in (b, d)$).

● b) Si f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en (a, b), continua por la izquierda en b y continua por la derecha en a, entonces f satisface los Teoremas 6.25., 6.26. y 6.27. y el Corolario 6.28. (SUGERENCIA: usar a) y la validez de 6.25., 6.26., 6.27. y 6.28. para g).

● c) Si f es como en b) y además es estrictamente creciente en $[a, b]$, probar que f: $[a, b] \to [f(a), f(b)]$ es biyectiva y que $f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a, b]$ es continua en $(f(a), f(b))$, continua por la izquierda en $f(b)$ y continua por la izquierda en $f(a)$.

● d) Enunciar y demostrar un resultado análogo al de c) cuando f es continua en $(a, b]$ y continua por la derecha en a. Idem si f es continua en $[a, b)$ y continua por la izquierda en b.

2

■ *a) Probar que, para* n *par, la función* g: $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x) = \sqrt[n]{x}$ *es continua en* $\mathbb{R}_{>0}$ *y continua por la derecha en* 0. *(Usar 6.29. para la continuidad en* $\mathbb{R}_{>0}$ *y probar a mano la continuidad por la derecha en* 0*).*

■ *b) Probar que, para* n *impar, la función* g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x) = \sqrt[n]{x}$ *es continua (Usar. 6.29.).*

3

★ a) Probar que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene una raíz real en el intervalo $(1, 2)$.

★ b) Probar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = x$.

4

◆ a) Sean f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas que nunca se anulan tales que $|f(x)| = |g(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y supongamos que existe un número real x_0 tal que $f(x_0) = g(x_0)$. Probar entonces que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

◆ b) Mismo problema para f, g: $[a, b] \to \mathbb{R}$. Idem para f, g: $(a, b) \to \mathbb{R}$.

5

Supongamos que f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua y que* $f(x) \in \mathbb{Q}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Probar que* f *es una función constante.*

6.7. CONTINUIDAD UNIFORME

Antes de dar la definición, digamos que un *intervalo* significará para nosotros un intervalo abierto (a, b), o cerrado $[a, b]$, o semiabierto ($[a, b)$ o $(a, b]$), finito o infinito ($(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $(b, +\infty)$, $[b, +\infty)$, $\mathbb{R}$).

DEFINICION 6.30.

Una función f definida en un intervalo A se dice *uniformemente continua en* A si, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ con la siguiente propiedad: "si x y x′ verifican $|x - x'| < \delta$, entonces es $|f(x) - f(x')| < \epsilon$".

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

A primera vista, esta definición no parece ser diferente de la definición de función continua. Pero sólo a primera vista: si una función es continua en un intervalo A, eso significa que, para cada $x_0 \in A$, f es continua en x_0. Y a su vez, eso significa que dado $\epsilon < 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $|x - x_0| < \delta$, es $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Esto se puede hacer para cada $x_0 \in A$ pero la forma en que depende δ de ϵ, la función $\delta = \delta(\epsilon)$, puede cambiar cuando cambia x_0. Lo que pide la definición de continuidad uniforme es que haya *una* función $\delta(\epsilon)$ que sirva *para todos los* $x_0 \in A$.

Veamos un ejemplo: afirmamos que la función $f(x) = x^2$ es uniformemente continua en, por ejemplo, el intervalo $(1, 2)$. En efecto, si $x, x' \in (1, 2)$:

$$|f(x) - f(x')| = |x^2 - x'^2| = |(x - x')(x + x')| =$$
$$= |x - x'||x + x'| < |x - x'||2 + 2|$$
$$= 4\,|x - x'|$$

y entonces basta tomar $\delta = \dfrac{\epsilon}{4}$ para que $|x - x'| < \delta$ implique $|f(x) - f(x')| < \epsilon$.

Antes de dar un ejemplo de una función continua pero no uniformemente continua, veamos como se expresa el hecho de que una función *no* sea uniformemente continua. Procediendo igual que como lo hicimos antes de la Proposición 6.8. (para ver que (2) era equivalente a (3)), se puede verificar que f *no* es uniformemente continua en A si y sólo si ocurre lo siguiente:

"Existe $\epsilon > 0$ tal que, cualquiera sea $\delta > 0$, hay puntos x y x′ en A que verifican $|x - x'| < \delta$ y $|f(x) - f(x')| \geq \epsilon$". (12)

Consideremos ahora la función:

$$f: (0, 1) \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = 1/x$$

Esta función es continua en $(0, 1)$ por ser cociente de funciones continuas con denominador distinto de cero en todos los puntos de $(0, 1)$.

Para ver que *no* es uniformemente continua en $(0, 1)$, por (12) tenemos que exhibir *un* $\epsilon > 0$ tal que, etc. Tomamos entonces $\epsilon = 1$.

Ahora, para cualquier $\delta > 0$ hay que conseguir x y x′ en $(0,1)$ que verifiquen $|x - x'| < \delta$ y $|f(x) - f(x')| \geq 1$. Sea entonces $\delta > 0$ y sea n un número natural tal que $\dfrac{1}{2n} < \delta$. Sean:

$$x = \frac{1}{n}\,; \qquad x' = \frac{1}{2n}$$

Entonces $|x - x'| = \left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n}\right| = \left|\dfrac{2-1}{2n}\right| = \dfrac{1}{2n} < \delta$; además:

$$|f(x) - f(x')| = \left|\frac{1}{1/n} - \frac{1}{1/2n}\right| =$$
$$= |n - 2n| = |-n| = n \geq 1$$

Geométricamente podemos comprender el motivo

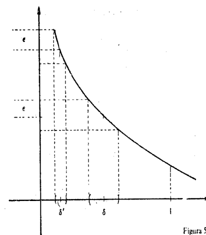


Figura 51

por el cual esta función no es uniformemente continua: el δ que hay que tomar para que sea $|f(x)-f(x')|<$ $<\epsilon$ es cada vez más chico (tiende a cero) a medida que x y x' se acercan a cero (ver figura).

El resultado principal sobre funciones uniformemente continuas es el Teorema de Heine-Cantor, que usaremos en capítulos posteriores:

TEOREMA 6.31.

(HEINE-CANTOR)

Si f es continua en el intervalo *cerrado* $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$.

Demostración: Supongamos que f *no* es uniformemente continua en $[a, b]$. Entonces, por (12), existe un $\epsilon > 0$, que vamos a indicar ϵ_0 con la siguiente propiedad:

"Para todo $\delta > 0$ hay números x y x' en $[a, b]$ que verifican $|x - x'| < \delta$ y $|f(x) - f(x')| \geqslant \epsilon_0$" (13)

Ya que (13) vale para *todo* $\delta > 0$, en particular vale para $\delta = \frac{1}{n}$ con $n \in N$. Sean x_n y x'_n los correspondientes x y x' en $[a, b]$ que satisfacen:

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \qquad (14)$$

y

$$|f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \epsilon_0 \qquad (15)$$

Haciendo esto para cada $n \in N$, obtenemos dos sucesiones $(x_n)_{n\geqslant 1}$ y $(x'_n)_{n\geqslant 1}$ *contenidas en* $[a, b]$ que satisfacen (14) y (15).

Como, en particular, $(x_n)_{n\geqslant 1}$ está contenida en $[a, b]$, entonces $(x_n)_{n\geqslant 1}$ es una sucesión *acotada*; luego el Teorema de Weierstrass (Teorema 3.30.) nos dice que esta sucesión contiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ *convergente:*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c \qquad (16)$$

Como $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$ para todo $k \in N$ (porque lo propio ocurre para *todo* x_n), entonces es $a \leqslant c \leqslant b$, o sea $c \in [a, b]$.

Probemos que también es:

$$\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = c \qquad (17)$$

En efecto, es:

$$|x'_{n_k} - c| = |x'_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} - c| \leqslant$$
$$\leqslant |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c| =$$
$$= |x_{n_k} - x'_{n_k}| + |x_{n_k} - c| < \text{(por (14))}$$
$$< \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - c| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{k} + |x_{n_k} - c| \qquad (18)$$

Ahora, dado $\epsilon > 0$, sea $k_1 \in N$ tal que $\frac{1}{k_1} < \frac{\epsilon}{2}$ y sea $k_2 \in N$ tal que, para $k \geqslant k_2$, sea $|x_{n_k} - c| < \frac{\epsilon}{2}$ (k_2 se puede conseguir por (16)). Entonces, por (18), resulta, para $k \geqslant k_0 = \max(k_1, k_2)$:

$$|x'_{n_k} - c| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

lo cual, siendo $\epsilon > 0$ arbitrario, prueba (17).

Siendo f continua en $[a, b]$ y siendo $c \in [a, b]$, las igualdades (16) y (17) implican:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$$

$$\lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(c)$$

de donde:

$$\lim_{k\to\infty} (f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})) = f(c) - f(c) = 0$$

lo cual es imposible por (15), que vale para todo n, en particular para los n_k.

EJERCICIOS

1

Probar que las siguientes funciones son uniformemente continuas en el intervalo indicado:

- a) $f(x) = x^2$ en $(0, 3)$;
- b) $f(x) = x^2$ en $(-1, 2)$;
- c) $f(x) = x^3$ en $(1, 2)$
  (Usar $x^3 - x'^3 = (x - x')(x^2 + xx' + x'^2)$)
- d) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ en R;
- e) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $[1, +\infty)$

2

Probar que las siguientes funciones no son uniformemente continuas en el intervalo indicado:

- *a)* $f(x) = \frac{1}{x}$ *en* $(-1, 0)$;
- *b)* $f(x) = x^3$ *en* R *(tomar* $x = n + \frac{1}{n}$, $x' = n$ *para cada* $n \in N$ *y* $\epsilon = 2$*)*;
- *c)* $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *en* $(0, 1)$.

3

★ a) Probar que si f es uniformemente continua en (a, b), entonces es continua en (a, b).

★ b) Probar que si f es uniformemente continua en $[a, b]$, entonces es continua en (a, b), continua por la derecha en a y por la izquierda en b.

4

a) Dar un ejemplo de una función $f: R \to R$ *acotada y continua, pero no uniformemente continua (SUGERENCIA: definir* $f(n) = 1$ *y* $f(n + \frac{1}{n}) = 0$ *para* $n \in N$ *y completar con funciones lineales como en el Ejercicio 8 del parágrafo 6.5.; tomar* $\epsilon = 1$*).*

b) Dar un ejemplo de una función $f: (0, 1) \to R$ *acotada y continua, pero no uniformemente continua (SUGERENCIA: definir* $f(\frac{1}{2n}) = 1$ *y* $f(\frac{1}{2n-1}) = 0$ *para* $n \in N$ *y completar como en a)).*

CAPITULO VII

Derivadas

Con este capítulo entramos de lleno en el terreno del Cálculo diferencial e integral. Todo lo hasta ahora visto puede considerarse como una preparación, larga y trabajosa, pero necesaria, para los temas que vamos a tratar en este y en los subsiguientes capítulos.

7.1. DEFINICION DE DERIVADA

Consideremos una función f definida en un intervalo abierto (a, b) y sean x_0, $x_0 + h$ pertenecientes a (a, b). La variación absoluta de f cuando x se incrementa de x_0 a $x_0 + h$ está medida, desde luego, por $f(x_0 + h) - f(x_0)$; pero si queremos medir la variación *relativa* de f, entonces debemos dividir esa diferencia por lo que se incrementó x (o sea, por h):

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

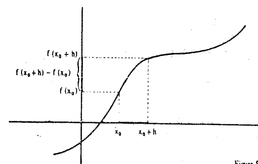


Figura 52

Este cociente recibe el nombre de "cociente incremental" e, insistimos, mide la variación relativa de f cuando x pasa de x_0 a $x_0 + h$.

Dicho incremento depende de h, pero si tomamos h cada vez más pequeño, entonces tendremos una medida de la variación "instantánea" de f en x_0. Más precisamente:

DEFINICION 7.1.

Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, b) y sea $x_0 \in (a, b)$. Decimos que f es *derivable en* x_0 si existe el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En caso de que ese límite exista, se lo indica $f'(x_0)$ y se lo llama *derivada de* f *en* x_0.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

La derivada de una función en un punto tiene una sencilla interpretación geométrica, en términos de la representación gráfica de dicha función. Para establecerla, consideremos la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Según vimos en el Capítulo anterior (parágrafo 5.1.), la

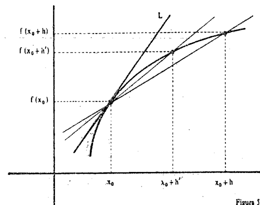


Figura 53

pendiente de dicha recta es:

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1)$$

Si ahora tomamos h cada vez más pequeño, entonces vemos en la figura que la recta considerada se va aproximando a la recta L tangente a la curva en el punto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$. Por otra parte, la pendiente de esa recta se va aproximando, según (1), a la derivada $f'(x_0)$. Deducimos entonces el siguiente resultado:

Si f es una función definida en (a, b), si $x_0 \in (a, b)$ y si existe $f'(x_0)$, entonces $f'(x_0)$ es igual a la pendiente de la recta tangente a la representación gráfica de f en el punto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$.

La ecuación de la recta tangente L es ahora fácil de encontrar. Debe ser de la forma $y = mx + b$, con $m = f'(x_0)$. Como debe pasar por $(x_0, f(x_0))$, entonces:

$$f(x_0) = f'(x_0) . x_0 + b$$

de donde $b = f(x_0) - f'(x_0).x_0$. En definitiva, obtenemos la *ecuación de la recta tangente a la representación gráfica de* f *en el punto de coordenadas* $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (2)$$

Si llamamos $y_0 = f(x_0)$, esta ecuación se puede poner en la siguiente forma, sencilla de recordar:

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)} \quad (3)$$

La derivada tiene también una interpretación física que es importante destacar. Para establecerla, consideremos un cuerpo desplazándose sobre una línea recta, por ejemplo, un automóvil en un tramo recto de una ruta.

Fijando una unidad de medida para las longitudes (por ejemplo, el kilómetro) y una unidad de medida para el tiempo (por ejemplo, la hora), entonces la velocidad de dicho automóvil estará medida (en kilómetros por hora) por el cociente entre el espacio que haya recorrido y el tiempo que haya empleado en recorrerlo.

Eso, desde luego, mide una velocidad promedio pues, en el intervalo de tiempo considerado, el móvil puede haber recorrido algunas partes del trayecto más rápido que otras o, incluso, haberse detenido un rato. Pero hay una noción de velocidad que no es un promedio, que es una noción de velocidad "instantánea", y es la que marca el velocímetro.

Independientemente de cuál sea el mecanismo por el cual el velocímetro marca la velocidad en cada instante, hay una manera de llegar (teóricamente) a medir velocidades instantáneas a partir de velocidades promedio: si podemos establecer qué posición ocupaba el móvil en cada instante, entonces tenemos la distancia recorrida, digamos s, en función del tiempo, $s = s(t)$.

Para calcular la velocidad en el instante t_0, comenzamos considerando un tiempo t a partir de t_0 y calculando la velocidad promedio:

$$\frac{s(t_0 + t) - s(t_0)}{t_0 + t - t_0} = \frac{s(t_0 + t) - (t_0)}{t} \quad (4)$$

Ahora, siempre para calcular la velocidad en el instante t_0, tomamos límite en (4) cuando $t \to 0$. Lo que obtenemos, de acuerdo a la Definición 7.1., es la derivada $s'(t_0)$.

Deducimos entonces:

Si, en un movimiento rectilíneo, tenemos el espacio recorrido en función del tiempo, $s = s(t)$, entonces la velocidad del móvil en el instante t_0 está medida por la derivada de dicha función en t_0, $s'(t_0)$.

Las interpretaciones geométrica y física de la derivada tienen una notable importancia en las respectivas disciplinas, pero en este libro sólo discutiremos (más adelante) unas pocas consecuencias geométricas, dejando el resto para los correspondientes textos de Geometría y de Física.

Antes de pasar a probar propiedades de las funciones derivables, notemos que el límite $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ es lo mismo que el $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (uno existe si y sólo si existe el otro y, en caso de existir, son iguales), como el lector podrá verificar simplemente mirando la Definición 6.1. Por lo tanto, para funciones derivables en x_0, podemos escribir:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

La noción de derivada es *puntual*, hemos definido derivabilidad *en un punto* x_0.

Desde luego, derivable en un conjunto significará derivable en todos los puntos de dicho conjunto.

Tenemos ya otra noción puntual, que es la de *continuidad.* Es importante relacionar ambos conceptos:

PROPOSICION 7.2.

Si una función es derivable en x_0, entonces es continua en x_0.

Demostración

Si f es derivable en x_0, entonces existe:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Entonces, por Proposición 6.6.:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,.\,(x-x_0)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,.\,\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=$$

$$=f'(x_0)\,.\,0=0$$

Luego $\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$, que es lo mismo que decir:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

y ésto es lo que queríamos probar. ///

La recíproca de la Proposición 7.2. no es cierta, hay funciones continuas en un punto que *no* son derivables en dicho punto. Por ejemplo, consideremos $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=|x|$. Es claro que $\lim_{x\to0}|x|=0$,

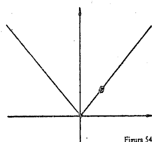


Figura 54

así que la función módulo es continua en $x_0=0$ (así como en cualquier otro punto). Pero no es derivable en $x_0=0$, es decir, no existe el límite de $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ cuando $h\to0$. Para demostrarlo, calculamos los límites laterales:

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{h}{h}=1$$

$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

Siendo los límites laterales distintos, por Proposición 6.13., el límite indicado no existe.

La no derivabilidad de esta función en $x_0=0$ es geométricamente evidente: si fuera derivable en 0, habría recta tangente a su representación gráfica en (0, 0), cosa que no ocurre (la curva tiene un "vértice" allí).

Existen también funciones continuas en todo $\mathbb{R}$ y no derivables en ningún punto. No estamos todavía en condiciones de exhibir una tal función, cosa que haremos en el Capítulo 10 (función de Weierstrass).

Como otro ejemplo, consideremos $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Esta función es continua en $x_0=0$. En efecto, para $x\neq0$ es:

$$|f(x)| = |x \operatorname{sen}\frac{1}{x}| =$$

$$=|x|\,.\,|\operatorname{sen}\frac{1}{x}|\leqslant|x|\,.\,1=|x|$$

y por lo tanto $\lim_{x\to0} f(x)=0=f(0)$. En cambio, no es derivable en $x_0=0$ pues:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{f(h)-f(0)}{h}=$$

$$=\frac{h\operatorname{sen}\dfrac{1}{h}-0}{h}=\operatorname{sen}\frac{1}{h}$$

y esta expresión, según vimos en el parágrafo 6.2., no tiene límite cuando $h\to0$.

EJERCICIOS

1

Calcular, utilizando la definición de derivada:

★ *a)* $f'(1)$ *si* $f(x)=2x+3$;

★ *b)* $f'(2)$ *si* $f(x)=3x^2-1$;

★ *c)* $f'(4)$ *si* $f(x)=\sqrt{x}$;

★ *d)* $f'(2)$ *si* $f(x)=1/x$.

2

Los límites laterales de $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ cuando $x\to x_0$ se denominan *derivadas laterales.* Analizar, en los siguientes casos, la existencia de las derivadas laterales y de la derivada en $x_0=0$:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

b) $f(x)=[x]$

c) $f(x)=x-[x]$

d) $f(x)=\sqrt{x-[x]}$

e) $f(x)=[x]+\sqrt{x-[x]}$

f) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

3

Probar que si f es derivable en x_0 y $c\in\mathbb{R}$, entonces $c\,.\,f$ (es decir, la función $x\to c\,.\,f(x)$) es derivable en x_0 y además:

$$(cf)'(x_0)=c\,.\,f'(x_0)$$

4

Sean f, g *definidas en* (a, b), *sea* $x_0\in(a,b)$ *y supongamos que* g *es derivable en* x_0. *Si existe* $\delta>0$ *tal que, para* $|x-x_0|<\delta$, *es* $f(x)=g(x)$, *entonces* f *es derivable en* x_0 *y* $f'(x_0)=g'(x_0)$. *(Ver ejercicio 2 de parágrafo 6.1.).*

5

Sea $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

("función de Dirichlet").

◆ a) Probar que f no es continua en ningún punto

◆ b) Si $g(x) = x \cdot f(x)$, probar que g es continua en $x_0 = 0$ pero no derivable en dicho punto.

◆ c) Si $h(x) = x^2 f(x)$, probar que h es derivable en $x_0 = 0$.

6

La recta normal por $(x_0, f(x_0))$ es la recta perpendicular a la recta tangente por dicho punto. En el ejercicio 1, hallar las ecuaciones de las rectas tangentes y normal en los puntos allí indicados (ver parágrafo 5.2.).

7.2.

LA FUNCION DERIVADA; REGLA DE LA CADENA

Supongamos que f está definida en un intervalo (a, b) y que es derivable en todos los puntos de (a, b). Para cada $x \in (a, b)$ tenemos una correspondiente $f'(x) \in \mathbb{R}$. De esta manera tenemos definida una función:

$$x \to f'(x)$$

que, naturalmente, se llamará *función derivada* de f y se indicará f'.

La potencia del Cálculo Diferencial en sus diversas aplicaciones depende del hecho siguiente: es muy fácil probar que las funciones hasta aquí estudiadas (polinómicas, trigonométricas, logarítmicas, etc.) son derivables en todo su dominio y es muy fácil encontrar sus funciones derivadas. Veamos cómo.

Comenzamos por un ejemplo muy sencillo: *si f es la función constante, $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces su derivada es la función nula.* En efecto:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

luego el cociente incremental es cero cualquiera sea $h \neq 0$, por lo tanto tiende a cero cuando h tiende a cero.

La derivada de la función "identidad" ($f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$) es también sencilla de encontrar. Pues el cociente incremental es:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

o sea, es constantemente igual a 1, luego tiende a 1 cuando $h \to 0$. Entonces, *la derivada de la función identidad es la función constantemente igual a 1.*

Consideremos ahora la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Para esta función es:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$$

que claramente tiende a $2x$ para $h \to 0$. Luego, *la derivada de la función dada por $f(x) = x^2$ es la función dada por $f'(x) = 2x$.*

Pasemos a funciones más complicadas. Consideremos la función seno, $f(x) = \operatorname{sen} x$. El cociente incremental es, en este caso:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \text{(Por Ejercicio 3.j. del Apéndice al Capítulo 5)}$$

$$= \frac{2\cos\frac{x+h+x}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{x+h-x}{2}}{h} =$$

$$= \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\operatorname{sen} h/2}{h/2}$$

Cuando $h \to 0$, el primer factor tiende a $\cos x$ (por la continuidad del coseno) y el segundo factor tiende a 1 según vimos en el parágrafo 6. Luego, para $f(x) = \operatorname{sen} x$, es $f'(x) = \cos x$, o sea, *la derivada de la función seno es la función coseno.*

Para la función coseno, $f(x) = \cos x$, el cociente incremental es:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \text{(Ejercicio 3.k del Apéndice al Capítulo 5)}$$

$$= \frac{-2\operatorname{sen}\frac{x+h+x}{2}\operatorname{sen}\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= -\operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\operatorname{sen} h/2}{h/2}$$

Cuando $h \to 0$, el primer factor tiende a $-\operatorname{sen} x$ (por la continuidad del seno) y el segundo tiende a 1. Luego, para $f(x) = \cos x$, es $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, sea, *la derivada de la función coseno es menos la función seno.*

Tomemos ahora el caso de la función logaritmo (natural), $f(x) = \ell n\, x$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\ell n(x+h) - \ell n\, x}{h} = \frac{1}{h} \cdot \ell n \frac{x+h}{x} =$$

$$= \ell n\left(\frac{x+h}{x}\right)^{1/h} = \ell n\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \ell n\left(1+\frac{1}{x/h}\right)^{x/h}$$

y como $\left(1+\frac{1}{x/h}\right)^{x/h}$ tiende a e (Ejercicio 6.c. de parágrafo 6.4.), el segundo factor, por continuidad del logaritmo, tiende a $\ell n\, e = 1$. Luego, si $f(x) = \ell n\, x$, entonces $f'(x) = 1/x$, o sea, *la derivada de la función logaritmo es la recíproca de la función identidad.*

Si ahora consideramos la función exponencial, $f(x) = e^x$, entonces es:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} =$$

$$= \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

Llamemos $k = k(h) = e^h - 1$; despejando es $e^h = k+1$, o sea $h = \ell n(1+k)$. Entonces:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = e^x \cdot \frac{k}{\ell n(1+k)} =$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{\frac{1}{k}\,\ell n(1+k)} =$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{\ell n(1+k)^{1/k}}$$

Ahora bien, cuando $h \to 0$ resulta $k \to 0$ (pues $e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ y e^x es continua en $x_0 = 0$). En ese caso $(1+k)^{1/k}$ tiende al número e (Ejercicio 6.c. de 6.4.) y por lo tanto su logaritmo (natural) tiende a 1 (por la continuidad del logaritmo). Luego, si $f(x) = e^x$, es $f'(x) = e^x = f(x)$, o sea, *la derivada de la función exponencial es la misma función exponencial.*

Apelando a un difundido abuso de notación, podemos indicar los resultados anteriores de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&(c)' = 0\\
&(x)' = 1\\
&(x^2)' = 2x\\
&(\text{sen } x)' = \cos x\\
&(\cos x)' = -\text{sen } x \qquad (5)\\
&(\ln x)' = \frac{1}{x}\\
&(e^x)' = e^x
\end{aligned}$$

Es importante notar que el procedimiento que nos llevó a las fórmulas (5), por un lado *demuestra* que todas las funciones consideradas *son derivables en todo punto de su dominio*, y por otro lado nos dice explícitamente *cuánto* valen sus derivadas en cualquier punto.

Para seguir adelante con el cálculo de derivadas, necesitamos tres propiedades que nos indican cómo se comporta la derivada frente a las operaciones elementales de funciones (suma, producto y cociente).

PROPOSICION 7.3.

Si f y g son derivables en x_0, entonces $f+g$ es derivable en x_0 y además:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(o sea, la derivada de la suma es igual a la suma de las derivadas).

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración

Ante todo notemos que estamos bien con el dominio: si f está definida en un intervalo abierto que contiene a x_0 y g está definida en otro intervalo abierto que contiene a x_0, entonces también $f+g$ está definida en un intervalo abierto que contiene a x_0 (la intersección de los dos anteriores).

Hecha esta aclaración, calculamos el cociente incremental:

$$\frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - (f(x_0) + g(x_0))}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

Cuando $h \to 0$, el primer sumando tiende a $f'(x_0)$ y el segundo a $g'(x_0)$. Luego (Proposición 6.5.), existe límite del cociente incremental indicado (o sea existe $(f+g)'(x_0)$) y es igual a $f'(x_0) + g'(x_0)$. ///

PROPOSICION 7.4.

Si f y g son derivables en x_0, entonces $f \cdot g$ es derivable en x_0 y además:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración

Respecto al dominio, valen las consideraciones de la Proposición anterior. En cuanto al cociente incremental, es:

$$\frac{(f \cdot g)(x_0+h) - (f \cdot g)(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{f(x_0+h)\, g(x_0+h) - f(x_0)\, g(x_0+h) + f(x_0)\, g(x_0+h) - f(x_0)\, g(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot g(x_0+h) + f(x_0)\, \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

Ahora bien, el primer factor del primer sumando tiende a $f'(x_0)$, mientras que el segundo factor del primer sumando tiende a $g(x_0)$ (Pues al ser g derivable en x_0, es continua en x_0, de acuerdo a la Proposición 7.2.).

Por otra parte, el segundo factor del segundo sumando tiende a $g'(x_0)$. Luego (Proposiciones 6.5. y 6.6.), existe límite del cociente incremental indicado (o sea, existe $(f \cdot g)'(x_0)$) y es igual a $f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$. ///

PROPOSICION 7.5.

Sean f y g derivables en x_0 y supongamos $g(x_0) \neq 0$. Entonces f/g es derivable en x_0 y además:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración

Al ser g derivable en x_0, es continua en x_0 (Proposición 7.2.). Entonces, al ser $g(x_0) \neq 0$, existe un intervalo abierto alrededor de x_0 en el cual g es distinta de cero. Con esto y recordando las consideraciones de la Proposición 7.3., resulta que f/g está definida en un intervalo abierto alrededor de x_0 (la intersección de los tres).

Calculemos el cociente incremental. Es:

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x_0+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{h} = \frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} = \frac{\frac{f(x_0+h)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0+h)}{g(x_0+h)\, g(x_0)}}{h} =$$

$$= \frac{1}{g(x_0+h)\, g(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+h)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0+h)}{h}$$

$$= \frac{1}{g(x_0+h)\, g(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+h)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0+h)}{h} =$$

$$= \frac{1}{g(x_0+h)\, g(x_0)} \cdot \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\right]$$

Ahora bien, el denominador $g(x_0+h)\, g(x_0)$ tiende a $g(x_0)^2$ cuando $h \to 0$ (continuidad de g en x_0). Respecto al corchete, el primer sumando tiende a

$f'(x_0) \cdot g(x_0)$ y el segundo a $-f(x_0) \cdot g'(x_0)$. Luego (Proposiciones 6.5., 6.6. y 6.7.), existe límite cuando $h \to 0$ del cociente incremental indicado (o sea, existe $(f/g)'(x_0)$) y es igual a:

$$\frac{1}{g(x_0)^2}\;[f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)]$$

que es lo que queríamos probar. ///

Podemos resumir estas tres Proposiciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(f+g)' &= f' + g' \\ (f \cdot g)' &= f'g + fg' \qquad (6)\\ (f/g)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2}\end{aligned}$$

y es importante recordar que, si bien la derivada de la suma es la suma de las derivadas, *no* es cierto que la derivada del producto sea el producto de las derivadas y *no* es cierto que la derivada del cociente sea el cociente de las derivadas.

La Proposición 7.4. nos permite ver cuál es la derivada de la función $f(x) = x^n$ cualquiera sea $n \in N$. Vimos antes que la derivada de $f(x) = x$ es $f'(x) = 1 = 1 \cdot x^0$, y que la derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x = 2 \cdot x^1$. Vamos a probar ahora que la derivada de $f(x) = x^n$ es $f'(x) = n\,x^{n-1}$ para todo $n \in N$. Naturalmente, lo hacemos por inducción.

Para $n = 1$, es el resultado ya conocido de que la derivada de $f(x) = x$ es $f'(x) = 1$. Supongamos que nuestra afirmación es cierta para un determinado $n \in N$, es decir, supongamos que para $f(x) = x^n$ es $f'(x) = n\,x^{n-1}$. Si $g(x) = x^{n+1}$, entonces $g(x) = x \cdot x^n = h(x) \cdot f(x)$, donde $h(x) = x$. Entonces, por 7.4.:

$$\begin{aligned} g'(x) &= h'(x)\,f(x) + h(x)\,f'(x) = \\ &= 1 \cdot x^n + x \cdot n\,x^{n-1} = \\ &= x^n + n\,x^n = \\ &= (n+1)\,x^n \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar (apelando al abuso de notación de (5), esta demostración se simplifica: $(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = (x)' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = 1 \cdot x + x \cdot n\,x^{n-1} = (n+1)\,x^n$) (Notar que en (5) hay dos casos particulares de esta fórmula).

Con esto, ya podemos derivar varias funciones. Por ejemplo, cualquier función polinomial (ver parágrafo 2.3.) es suma de expresiones del tipo $a_n x^n$; cada una de ellas es derivable (Ejercicio 3 de 7.1.) y su derivada es $a_n\,n\,x^{n-1} = n\,a_n\,x^{n-1}$.

Luego, toda función polinómica es derivable (en todo $x_0 \in R$).

Por ejemplo, si $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 5$, entonces, por (6) y lo que acabamos de decir:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot 4\,x^2 - 2 \cdot 3\,x + 5 - 0 = \\ &= 12\,x^2 - 6x + 5 \end{aligned}$$

También, usando (6), podemos derivar funciones racionales (es decir, cocientes de funciones polinómicas; por 7.5. son derivables en todo su dominio). Por ejemplo, si:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x - 2}{2x^2 + 4}$$

entonces, por (6):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2+3)(2x^2+4) - (x^3+3x-2)(4x)}{(2x^2+4)^2} = \\ &= \frac{6x^4 + 18x^2 + 12 - 4x^4 - 12x^2 + 8x}{(2x^2+4)^2} = \\ &= \frac{2x^4 + 6x^2 + 8x + 12}{(2x^2+4)^2} = \end{aligned}$$

y el mismo procedimiento se aplica para cualquier función racional.

Nuestro último paso de este parágrafo para calcular derivadas se refiere a la composición de funciones. Enunciamos el resultado, lo demostramos y después indicamos cómo se usa.

TEOREMA 7.6.
(REGLA DE LA CADENA)

Si g es derivable en x_0 y f es derivable en $g(x_0)$, entonces $f \circ g$ es derivable en x_0 y además es:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Demostración

Consideramos la siguiente función, definida en algún intervalo alrededor de cero (ver Proposición 6.10.):

$$\mu(k) = \begin{cases} \dfrac{f(g(x_0)+k) - f(g(x_0))}{k} - f'(g(x_0)) & \text{si } k \neq 0 \\[2ex] 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Esta función es continua en 0 por definición de derivada, o sea $\mu(k) \to 0$ cuando $k \to 0$. Si $k \neq 0$, podemos despejar:

$$f(g(x_0)+k) - f(g(x_0)) = k\,f'(g(x_0)) + k\,\mu(k) \qquad (7)$$

Pero la igualdad (7) es también válida para $k = 0$, como se puede verificar de inmediato (ambos miembros valen 0 para $k = 0$). Luego vale (7) para todo k en el dominio de definición de μ.

Calculemos ahora el cociente incremental para $f \circ g$:

$$\frac{f \circ g(x_0+h) - f \circ g(x_0)}{h} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} =$$

$$= \frac{f(g(x_0) + g(x_0+h) - g(x_0)) - f(g(x_0))}{h} =$$

(llamando $k = g(x_0+h) - g(x_0)$)

$$= \frac{f(g(x_0)+k) - f(g(x_0))}{h} = \qquad \text{(por (7))}$$

$$= \frac{k \cdot f'(g(x_0)) + k\,\mu(k)}{h} = \qquad \text{(recordando qué es } k)$$

$$= \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \cdot f'(g(x_0)) + $$

$$+ \frac{g(x_0+h) - g(x_0))}{h} \cdot \mu(k) \qquad (8)$$

Ahora bien, cuando $h \to 0$, el primer sumando de (8) tiende a $g'(x_0) \cdot f'(g(x_0)) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$. Respecto al segundo sumando, observemos que, cuando $h \to 0$, también $k \to 0$ (pues g es continua en x_0 al ser derivable allí). Luego: $\mu(k) \to 0$ cuando $h \to 0$, y entonces el segundo sumando tiende a $g'(x_0) \cdot 0 = 0$.

En definitiva:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f \circ g(x+h) - f \circ g(x_0)}{h} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

como queríamos demostrar. ///

Observación

Una demostración (mal hecha) del Teorema 7.6. se obtiene de la siguiente manera:

$$\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)} \cdot$$

$$\cdot \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} \cdot$$

$$\cdot \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \to f'(y_0) . g'(x_0) =$$

$$= f'(g(x_0)) . g'(x_0)$$

cuando $h \to 0$.

Esta demostración es incorrecta porque hemos multiplicado y dividido por $g(x_0+h)-g(x_0)$ que podría ser cero (considerar, por ejemplo, la función constante $g(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$). En la demostración que hemos hecho de 7.6., no nos molesta que sea $g(x_0+h) - g(x_0) = 0$ para todo h ó para algunos valores de h pues la fórmula (7) usada vale, como hemos indicado, aún para $k = 0$, es decir, aún para $g(x_0+h)-g(x_0) = 0$.

Veamos ahora algunos ejemplos que aclaren el uso de la regla de la cadena.

EJEMPLO 1

Consideremos la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \text{sen}(x^2+x)$$

Esta función es la composición de las dos siguientes funciones derivables:

$$h(x) = \text{sen}\, x$$
$$g(x) = x^2+x$$

pues $h \circ g(x) = h(g(x)) = h(x^2+x) = \text{sen}(x^2+x) = f(x)$.

Entonces, por la regla de la cadena, será f derivable, y además:

$$f'(x) = h'(g(x)) . g'(x)$$

Pero $h'(x) = \cos x$, luego:

$$h'(g(x)) = \cos(g(x)) = \cos(x^2+x)$$

y, como $g'(x) = 2x+1$, entonces:

$$f'(x) = \cos(x^2+x) . (2x+1)$$
$$= (2x+1) . \cos(x^2+x)$$

Nótese que el procedimiento utilizado se puede describir en términos más sencillos (aunque menos precisos): para derivar $\text{sen}(x^2+x)$, como esto es el seno de una expresión, su derivada es el coseno de esa expresión pero ***multiplicada por la derivada de la expresión.*** En la práctica, esta forma de enunciar el procedimiento de derivación de funciones compuestas facilita el cálculo, como veremos en el próximo ejemplo.

EJEMPLO 2

Consideremos, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \ell n(1+e^x)$$

Entonces, como la derivada de $\ell n\, x$ es $\frac{1}{x}$, la derivada de $\ell n(1+e^x)$ es igual a $\frac{1}{1+e^x}$ *pero multiplicada por la derivada de* $1+e^x$. En otras palabras:

$$f'(x) = \frac{1}{1+e^x} . (0+e^x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

EJEMPLO 3

Si tenemos la composición de tres ó más funciones, una aplicación reiterada de la regla de la cadena nos da también la derivada de esa composición (por ejemplo, es $(f \circ g \circ h)'(x_0) = [f \circ (g \circ h)]'(x_0) = f'(g \circ h(x_0)) . (g \circ h)'(x_0) = f'(g(h(x_0))) . g'(h(x_0)) . h'(x_0)$). Por caso, sea f la función:

$$f(x) = [\cos(\ell n(x^2+3))]^3$$

Como $f(x)$ es del tipo $g(x)^3$, entonces su derivada es $3g(x)^2 . g'(x)$. Como $g(x)$ es del tipo $\cos h(x)$, entonces su derivada es $(-\text{sen}\, h(x)) . h'(x)$. Como $h(x)$ es del tipo $\ell n\, p(x)$, entonces su derivada es $\frac{1}{p(x)} . p'(x)$. Por último, siendo $p(x) = x^2+3$, es $p'(x) = 2x$. En definitiva:

$$f'(x) = 3\, [\cos(\ell n(x^2+3))]^2 .$$

$$. (-\text{sen}(\ell n(x^2+3))) . \frac{1}{x^2+3} . 2x$$

EJEMPLO 4

Consideremos, para $a \in \mathbb{R}, a > 0$, la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = a^x$$

Podemos escribir:

$$f(x) = a^x = e^{\ell n\, a^x} = e^{x . \ell n\, a}$$

Entonces $f = h \circ g$, con:

$$h(x) = e^x$$
$$g(x) = x . \ell n\, a$$

Por lo tanto f es derivable en $\mathbb{R}$ y además:

$$f'(x) = h'(g(x)) . g'(x) = e^{g(x)} . g'(x) =$$

$$= e^{x\, \ell n\, a} . \ell n\, a = a^x . \ell n\, a$$

(Nótese que, para $a = e$, obtenemos nuevamente que la derivada de e^x es la misma e^x).

EJEMPLO 5

Para $a \in \mathbb{R}$, consideremos $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = x^a$$

Podemos escribir:

$$f(x) = x^a = e^{\ell n\, x^a} = e^{a\, \ell n\, x}$$

Entonces $f = h \circ g$, con:

$$h(x) = e^x$$
$$g(x) = a . \ell n\, x$$

Por lo tanto f es derivable en $\mathbb{R}_{>0}$ y además:

$$f'(x) = h'(g(x)) . g'(x) = e^{g(x)} . g'(x) =$$

$$= e^{a . \ell n\, x} . a . \frac{1}{x} = x^a . \frac{a}{x} = a . x^{a-1}$$

Como caso particular, si $a = n \in \mathbb{N}$, volvemos a obtener la fórmula $(x^n)' = n\, x^{n-1}$. Otro caso particular es este:

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

EJEMPLO 6

Sean f y g dos funciones derivables y supongamos $f(x) > 0$ para todo x en el dominio de f. Consideremos la función k dada por:

$$k(x) = f(x)^{g(x)}$$

Entonces es:

$$k(x) = f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{h(x) \ln f(x)}$$

Luego $k = h \circ t$ donde:

$$h(x) = e^x$$
$$t(x) = g(x) \,.\, \ln f(x)$$

Entonces k es derivable y además:

$$k'(x) = h'(t(x)) \,.\, t'(x) = e^{t(x)} \,.\, t'(x) =$$

$$= e^{g(x) \ln f(x)} (g'(x) \ln f(x) +$$

$$+ g(x) \,.\, \frac{1}{f(x)} \,.\, f'(x)) =$$

$$= f(x)^{g(x)} (g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)})$$

Por ejemplo, si $f(x) = x^x$, entonces

$$f'(x) = x^x (1 \,.\, \ln x + \frac{x \,.\, 1}{x}) =$$

$$= x^x (\ln x + 1)$$

Los resultados obtenidos en los ejemplos 4, 5 y 6 pueden resumirse de la siguiente forma:

$$(a^x)' = a^x \,.\, \ln a$$
$$(x^a)' = a \,.\, x^{a-1} \qquad (9)$$
$$(f^g)' = f^g (g' \ln f + \frac{gf'}{f})$$

Con lo visto hasta ahora, el lector podrá derivar casi cualquier función que se le ocurra, cosa que podrá verificar en los próximos ejercicios.

EJERCICIOS

1

■ a) Probar que la derivada de $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x}$ es $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ usando solamente la definición de derivada (SUGERENCIA: multiplicar el cociente incremental por el "conjugado"). Probar que no existe derivada por la derecha de esta función en $x = 0$.

■ b) Probar que la derivada de $f(x) = x^n$ es $f'(x) = n\,x^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ usando solo la definición de derivada (SUGERENCIA: usar Teorema 1.13., es decir, la fórmula del binomio de Newton).

2

★ *a) Probar que si* f *es par (y derivable), entonces* f' *es impar.*

★ *b) Probar que si* f *es impar (y derivable), entonces* f' *es par.*

3

Sea $f: \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln |x|$. Probar que f es derivable en $\mathbb{R}_{\neq 0}$ y que $f'(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$.

4

● a) Usando que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ y que $f \,.\, g = e^{\ln f.g} = e^{\ln f + \ln g} = e^{\ln f} \,.\, e^{\ln g}$, probar nuevamente la Proposición 7.4.

● b) Por un procedimiento análogo, probar nuevamente la Proposición 7.5.

5

*Se definen las funciones **hiperbólicas** de la siguiente manera:*

$$\text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

◆ *a) Probar que* $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$

◆ *b) Probar que:*

$$\text{sh}(x \pm y) = \text{sh}\, x\ \text{ch}\, y \pm \text{sh}\, y\ \text{ch}\, x$$
$$\text{ch}(x \pm y) = \text{ch}\, x\ \text{ch}\, y \pm \text{sh}\, x\ \text{sh}\, y$$

◆ *c) Probar que:*

$$(\text{sh}\, x)' = \text{ch}\, x$$
$$(\text{ch}\, x)' = \text{sh}\, x$$

◆ *d) Hallar* $(\text{th}\, x)', (\text{cth}\, x)', (\text{sech}\, x)'$ *y* $(\text{cosech}\, x)'$ *(estas funciones se definen igual que las trigonométricas).*

6

Hallar $f'(x)$ siendo $f(x)$ igual a:

★ a) $3x^3 + 6x^2 - 2x + 1$

★ b) $x(3 + x^2)$

★ c) $4x(2 + x^3 + 5x^4)$

★ d) $(x+2)(x+3)(3x+1)(2+5x^2)$

★ e) $\frac{x-1}{x}$

★ f) $\frac{4x-3}{2x+4}$

★ g) $\frac{(x+3)^2(4x-1)}{(2x+1)^2(3x-2)}$

★ h) $\sqrt{2x^2+3}$

★ i) $\sqrt{6x^2-3x-2}$

★ j) $(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$

★ k) $\frac{x^3}{(4-x^2)^3}$

★ l) $4x - \frac{2}{x}$

★ m) $\sqrt{x^2+a^2}$ $\qquad (a \in \mathbb{R})$

★ n) $\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

★ o) $\text{tg}\, x$

★ p) $\text{cotg}\, x$

★ q) $\sec x$

★ r) $\text{cosec}\, x$

★ s) $\text{tg}\, \frac{x^2+2x-1}{(x^2+3)^2}$

★ t) $\text{sen}\,(\text{sen}\,(\cos x)))$

★ u) $x\, \text{sen}\, x + \sqrt[3]{x^2}$

★ v) $\frac{x+e^x}{5-x^2} + \text{tg}\, x$

★ w) $\text{sen}\,(3x^3-1)(4x^2+7)$

★ x) $e^{\text{sen}\, x} + e^{\text{tg}\, x}$

7

Hallar $f'(x)$ siendo $f(x)$ igual a:

● a) $x \ln x$

● b) $x^3 \ln x + e^{x^2}$

- c) $\dfrac{\ln(x+2)}{x+2}$
- d) $(\ln x)^3$
- e) $\ln(x^3)$
- f) $\ln \dfrac{x^2}{1-x^2}$
- g) $\ln \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$
- h) $\ln \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$
- i) $\dfrac{x^3}{\ln x}$
- j) $\operatorname{ch}^2 x$
- k) $\operatorname{sh}^2 x$
- l) $\operatorname{th} x - \dfrac{1}{2}\operatorname{th}^3 x$
- m) $\ln(\operatorname{sh} x)$
- n) $\ln(\operatorname{sen} x^2)$
- o) $\ln(\operatorname{sen} x)^2$
- p) $(\ln(\operatorname{sen} x))^2$
- q) x^{3x}
- r) $(2^x)^x$
- s) 2^{x^x}
- t) $(\operatorname{sen}^3 x)^{\ln x}$
- u) $(x^2+1)^{\sqrt{x}} \cdot \cos 4x$
- v) $(\operatorname{sen}(\ln x))^{\cos x}$
- w) $\operatorname{sen} x^{\operatorname{sen} x}$
- x) x^{x^x}

7.3. TEOREMAS DEL VALOR MEDIO Y APLICACIONES

En este parágrafo vamos a ver cómo el conocimiento de la derivada de una función nos puede dar información acerca de la función misma. Esto no es extraño ya que, según indicamos en el parágrafo 7.1., la derivada es una medida de la variación "instantánea" de la función, y si uno conoce cómo varía la función puede deducir propiedades de la función misma.

En primer término, recordemos que un punto x_0 se dice *máximo* de f si es $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x en el dominio de f y *mínimo* de f si es $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x en el dominio de f. En otras palabras, un máximo de f es un punto en donde f alcanza su mayor valor posible y un mínimo de f es un punto en donde f alcanza su menor valor posible.

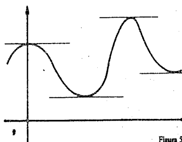


Figura 55

Como se puede observar en la figura, en los máximos y mínimos de una función la tangente es horizontal.

Si recordamos que las rectas horizontales tienen pendiente nula y que la pendiente de la tangente está medida por la derivada, entonces podemos enunciar:

TEOREMA 7.7.
(FERMAT)

Si f está definida en el intervalo abierto (a, b), si $x_0 \in (a, b)$ y es un máximo o mínimo de f y si f es derivable en x_0, entonces es:

$$f'(x_0) = 0$$

Demostración

Supongamos que x_0 es un mínimo de f. Entonces, para $x \in (a, b)$, es:

$$f(x) \geq f(x_0)$$

Calculemos las derivadas laterales; es:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Pero cuando $x \to x_0^+$, es $x > x_0$, luego $x - x_0 > 0$. Por otra parte es $f(x) - f(x_0) \geq 0$ por ser x_0 mínimo de f. Entonces, para $x > x_0$, es

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

y por lo tanto (Proposición 6.3.):

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (10)$$

Para la derivada por la izquierda, observemos que, cuando $x \to x_0^-$, es $x < x_0$, luego $x - x_0 < 0$. Como sigue siendo $f(x) - f(x_0) \geq 0$, entonces, para $x < x_0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

y en consecuencia (Proposición 6.3.):

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (11)$$

Como estamos suponiendo f derivable en x_0, entonces es (Proposición 6.13)

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

y por lo tanto, por (10) y (11), es $f'(x_0) \geq 0$ y $f'(x_0) \leq 0$. Luego $f'(x_0) = 0$, que es lo que queríamos demostrar (en el caso en que x_0 sea un máximo de f, se procede en forma totalmente similar. Hacerlo).

Observemos que el Teorema de Fermat no se puede aplicar si la función está definida sólo sobre un intervalo *cerrado* [a, b] y alcanza su máximo o mínimo en los extremos (ver figura).

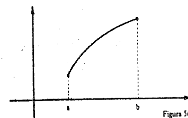
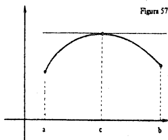


Figura 56

Ahora, para funciones definidas en intervalos cerrados, probamos el hecho, geométricamente evidente, de que si una función toma el mismo valor en los ex-

tremos de un intervalo, entonces, en algún punto intermedio de dicho intervalo, la tangente será horizontal. Con más precisión:



TEOREMA 7.8.
(ROLLE)

Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

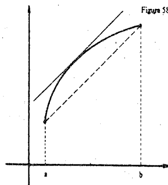
Demostración

Al ser f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces, por Teorema 6.26., existe $x_1 \in [a, b]$ en donde f alcanza su valor mínimo y existe $x_2 \in [a, b]$ en donde f alcanza su valor máximo.

Si $x_1 \neq a$ y $x_1 \neq b$, entonces debe ser $x_1 \in (a, b)$. Considerando entonces f restringida al intervalo (a, b), resulta que estamos en las condiciones del Teorema de Fermat (con $x_0 = x_1$). Luego $f'(x_1) = 0$. Análogamente si $x_2 \neq a$ y $x_2 \neq b$.

Si x_1 y x_2 están en los extremos de a, b (o sea, o son los dos a, o son los dos b, o son uno a y el otro b), entonces resulta $f(x_1) = f(x_2)$ (pues $f(a) = f(b)$).

Pero entonces la función es constante: si $x \in [a, b]$ es $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ por ser x_1 y x_2 mínimo y máximo respectivamente. Luego $f(x) = f(x_1) = f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$. El Teorema se sigue ahora del hecho de que una función constante tiene derivada nula en *todos* los puntos del dominio. ///



Este fue nuestro primer Teorema del Valor Medio. El segundo, que vamos a probar ahora, tiene también una interpretación geométrica: existe algún punto entre a y b en donde la tangente es paralela a la "cuerda" (recta por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$; ver figura).

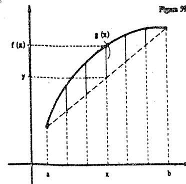
TEOREMA 7.9.
(LAGRANGE)

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Demostración

Para poder estar en las condiciones del Teorema anterior (en que $f(a) = f(b)$), consideremos para cada $x \in [a, b]$, la longitud $g(x)$ del segmento vertical indicada en la figura, (de esta manera será $g(a) = g(b) = 0$)



Como la ecuación de la cuerda es (parágrafo 5.1.):

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

dicha distancia es:

$$f(x) - y = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right)$$

$$= f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

Entonces consideramos la función:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

Esta función es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) por ser producto y resta de funciones de ese tipo (f es de ese tipo; todo lo demás es derivable en $\mathbb{R}$). Además:

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) =$$

$$= f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) =$$

$$= f(b) - (f(b) - f(a)) - f(a) = 0$$

Luego, al ser $g(b) = g(a)$, por Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Pero como:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 1$$

entonces de $g'(c) = 0$ obtenemos:

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que es equivalente a lo que queríamos demostrar. ///

Obsérvese que hemos demostrado el Teorema de Lagrange a partir del Teorema de Rolle pero que, si suponemos el Teorema de Lagrange, entonces el Teorema de Rolle es una consecuencia inmediata.

El Teorema de Lagrange es el habitualmente llamado *Teorema del Valor Medio* y tiene varias aplicaciones. Antes de pasar a éstas, queremos dar una versión más fuerte de este Teorema (es decir, un resultado del cual el Teorema de Lagrange es una consecuencia), que también tiene importantes aplicaciones:

TEOREMA 7.10.
(CAUCHY)

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c)$$

Si, además, $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demostración:

Consideremos la función:

$$h(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$$

La función h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) por ser producto y resta de funciones de ese tipo. Además:

$$h(b) = (f(b) - f(a))(g(b) - g(a)) - - (g(b) - g(a))(f(b) - f(a)) = 0$$

$$h(a) = (f(b) - f(a))(g(a) - g(a)) - - (g(b) - g(a)\ \ f(a) - f(a)) = = 0 - 0 = 0$$

Entonces h satisface las condiciones del Teorema de Rolle, por lo tanto existe $c \in (a,b)$ tal que $h'(c) = 0$. Pero:

$$h'(x) = (f(b) - f(a)).g'(x) - (g(b) - g(a)).f'(x)$$

luego es:

$$0 = h'(c) = (f(b) - f(a))\, g'(c) - g(b) - g(a))\, f'(c)$$

que es lo que queríamos demostrar. ///

Observemos que, para $g(x) = x$, el Teorema de Cauchy implica al Teorema de Lagrange. Una "demostración" (incorrecta) del Teorema de Cauchy a partir del de Lagrange es la siguiente: como $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ y $\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(c)$, entonces, dividiendo miembro a miembro, se simplifica $b - a$ y queda:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Esta demostración es falsa (falsísima) pues lo que afirma 7.9. es que, dada f, existe $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, pero el c en cuestión *depende de cuál sea la función* f, no tiene porqué ser el mismo para la función f que para la función g.

De todas maneras, este es un buen ejemplo de como, razonando incorrectamente, pueden extraerse conclusiones verdaderas.

Pasamos ahora a probar consecuencias del Teorema del Valor Medio. En primer término, recordemos que la derivada de una función constante es la función nula.

Nos planteamos ahora la pregunta recíproca: si una función tiene derivada nula en todo punto ¿es esa función constante? Parece natural esperar una respuesta afirmativa, pues si una representación gráfica tiene tangente horizontal en todo punto, es de esperar que dicha representación sea una recta horizontal.

La respuesta es, efectivamente, afirmativa:

PROPOSICION 7.11.

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y es $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces es f constante en $[a, b]$ (es decir, existe $k \in R$ tal que $f(x) = k$ para todo $x \in [a, b]$).

Demostración

Sean $x', x'' \in [a, b]$, digamos $x' < x''$. La función

f restringida al intervalo $[x', x'']$ satisface las condiciones del Teorema 7.9. del Valor Medio y, por lo tanto, existe $c \in (x', x'')$ tal que:

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = f'(c)$$

y por lo tanto:

$$f(x'') - f(x') = f'(c)(x'' - x')$$

Como $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, en particular $f'(c) = 0$. Luego $f(x'') - f(x') = 0$, o sea $f(x'') = f(x')$ cualesquiera sean $x', x'' \in [a, b]$, con lo cual f es constante (vale lo mismo en todos los puntos). ///

COROLARIO 7.12.

Si f *y* g *son continuas en* $[a, b]$ *y derivables en* (a, b) *y, además, es* $f'(x) = g'(x)$ *para todo* $x \in (a, b)$, *entonces* f *y* g *difieren en una constante, es decir, existe* $k \in R$ *tal que* $f(x) = g(x) + k$ *para todo* $x \in [a, b]$

Demostración

Basta aplicar 7.11. a la función $h(x) = f(x) - g(x)$ (pues resulta $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$). ///

La siguiente aplicación del Teorema del Valor Medio es también una información sobre f a partir de su derivada f':

PROPOSICION 7.13.

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)

★ a) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente en $[a, b]$ (es decir, si $x_1, x_2 \in [a, b]$, y es $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$)

★ b) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente en $[a, b]$ (es decir, si $x_1, x_2 \in [a, b]$ y es $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$).

Demostración

● a) Sean $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$. Considerando f restringida al intervalo $[x_1, x_2]$ resulta que ésta satisface las hipótesis de 7.9. Luego existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \qquad (12)$$

o sea

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Pero $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, en particular $f'(c) > 0$. Como $x_2 - x_1 > 0$, de (12) deducimos $f(x_2) - f(x_1) > 0$, o sea $f(x_1) < f(x_2)$.

● b) De la misma manera; solo cambia que ahora es $f'(c) < 0$ y, por lo tanto, es $f(x_2) - f(x_1) < 0$, o sea $f(x_1) > f(x_2)$. ///

Demostramos ahora un importante teorema que nos va a servir para calcular más funciones derivadas.

TEOREMA 7.14.

(DE LA FUNCION INVERSA)

Sea f una función continua y estrictamente creciente o estrictamente decreciente en $[a, b]$ (con lo cual existe inversa

$f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a, b]$ cuando f es estrictamente creciente o

$f^{-1}: [f(b), f(a)] \to [a, b]$ cuando f es estrictamente decreciente; teorema 6.29.).

Si $c \in (a, b)$, f es derivable en c y $f'(c) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $f(c)$ y además:

$$(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$

Demostración

Formamos el cociente incremental teniendo cuidado de que sea $h < f(b) - f(c)$ y $h < f(c) - f(a)$ (de manera que f^{-1} esté definida en $f(c) + h$):

$$\frac{f^{-1}(f(c)+h) - f^{-1}(f(c))}{h} = \frac{f^{-1}(f(c)+h) - c}{h}$$

Llamando k al numerador, $k = f^{-1}(f(c) + h) - c$, resulta

$$f^{-1}(f(c) + h) = c + k \Rightarrow f(c) + h = f(c + k)$$

$$\Rightarrow h = f(c + k) - f(c)$$

Por lo tanto, el cociente incremental indicado resulta ser:

$$\frac{f^{-1}(f(c)+h) - f^{-1}(f(c))}{h} = \frac{k}{f(c+k) - f(c)}$$

Para $h \neq 0$ es $k \neq 0$ (si $k = 0$, entonces $h = f(c+k) - f(c) = f(c) - f(c) = 0$); luego, dividiendo numerador y denominador por **k**:

$$\frac{f^{-1}(f(c)+h) - f^{-1}(f(c))}{h} = \frac{1}{\frac{f(c+k) - f(c)}{k}} \qquad (13)$$

Ahora, cuando $h \to 0$ resulta $k \to 0$; en efecto, siendo $k = f^{-1}(f(c) + h) - c$ y siendo f^{-1} continua (Teorema 6.29.), cuando $h \to 0$ resulta $k \to f^{-1}(f(c) + 0) - c = f^{-1}(f(c)) - c = c - c = 0$. Pero cuando $k \to 0$, el denominador del segundo miembro de (13) tiende a $f'(c)$. En definitiva:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(f(c)+h) - f^{-1}(f(c))}{h} = \frac{1}{f'(c)}$$

que es lo que queríamos demostrar. ///

Observemos que el Teorema 7.14. se puede escribir de esta manera:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad (14)$$

si llamamos $y = f(c)$. La expresión (14) resultará útil en los próximos ejemplos de aplicación de este Teorema.

EJEMPLO 1

Consideremos la función $f\colon R \to R$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$. Su derivada es $f'(x) = \cos x$, de cuya representación gráfica (ver Apéndice al Capítulo 5) deducimos que es positiva, por ejemplo, para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Luego, por la Proposición 7.13., la función seno es estrictamente creciente en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Como además es continua en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (lo es en R), entonces, por Teorema 6.29., existe función inversa que va de $[-1, 1]$ a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Esa función se indica **arc sen**:

$$\text{arc sen}\colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

y, por ser la inversa del seno, está caracterizada de la siguiente manera:

$$\text{arc sen } x = y \Leftrightarrow \text{sen } y = x \qquad (15)$$

Es decir, **arc sen x** (que se lee "arco cuyo seno es x" ó, más brevemente, "arco seno x") es aquel y cuyo seno es igual a x.

Como $(\text{sen } x)' = \cos x \neq 0$ en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, entonces *arc sen* es derivable en $(-1, 1)$. Para hallar su derivada, notemos que, por (14), es:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

es decir:

$$(\text{arc sen})'(x) = \frac{1}{\cos(\text{arc sen } x)}$$

Para simplificar esta expresión, llamemos $y = \text{arc sen } x$. Entonces $\text{sen } y = x$ con lo cual lo que queremos es saber cuánto vale $\cos y$ sabiendo que $\text{sen } y = x$. Pero, siendo $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es $\cos y > 0$ (ver representación gráfica del coseno en Apéndice al Capítulo 5), luego de $\cos^2 y + \text{sen}^2 y = 1$ deducimos:

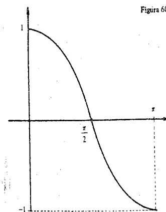
$$\cos y = +\sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

En definitiva:

$$(\text{arc sen})'(x) = \frac{1}{\cos(\text{arc sen } x)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (x \in (-1, 1))$$

EJEMPLO 2

Consideremos ahora la función $f(x) = \cos x$. Como $f'(x) = -\text{sen } x < 0$ para $x \in (0, \pi)$, entonces f es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$ por Proposición 7.13. Luego tiene inversa:



$$\text{arc cos}\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$$

y **arc cos** es derivable en $(-1, 1)$ (por Teorema 7.14., pues $f'(x) \neq 0$ para $x \in (0, \pi)$). Para calcular su derivada, nuevamente apelamos a (14):

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

o sea:

$$(\text{arc cos})'(x) = \frac{1}{-\text{sen}(\text{arc cos } x)}$$

Llamando $y = \text{arc cos } x$, resulta $\cos y = x$. Luego, de $\cos^2 y + \text{sen}^2 y = 1$ obtenemos

$$\text{sen } y = +\sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

(el seno es positivo en $(0, \pi)$), de donde:

$$(\text{arc cos})'(x) = \frac{1}{-\text{sen}(\text{arc cos } x)} = -\frac{1}{\text{sen } y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (x \in (-1, 1))$$

EJEMPLO 3

Sea $f(x) = tg\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x}$; recordemos que esta función está definida para $cos\,x \neq 0$, es decir, para $x \neq$ $\neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in Z)$. Consideremos entonces el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, intervalo en el cual está definida la tangente. Su derivada, de acuerdo a la Proposición 7.5., es:

$$f'(x) = \frac{cos\,x \,.\, cos\,x - sen\,x\,(-sen\,x)}{cos^2\,x} =$$

$$= \frac{cos^2\,x + sen^2\,x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2\,x} > 0$$

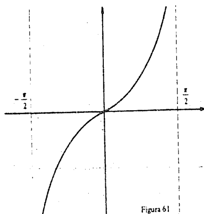


Figura 61

En consecuencia, la tangente de x es estrictamente creciente en ese intervalo. Cuando $x \to \frac{\pi^-}{2}$, es $sen\,x \to 1$ y $cos\,x \to 0^+$, luego $tg\,x \to +\infty$; y cuando $x \to -\frac{\pi^+}{2}$, es $sen\,x \to -1$ y $cos\,x \to 0^+$, luego $tg\,x \to -\infty$. En consecuencia (Ejercicio 1 de este parágrafo) la función $tg: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ es biyectiva. Si *arc tg* es su inversa, entonces arc tg es derivable en todo $\mathbb{R}$ (por ser la derivada de la tangente positiva, luego distinta de cero, según acabamos de ver). Para calcular su derivada apelamos, como siempre, a (14):

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

o sea:

$$(arc\,tg)'(x) = \frac{1}{\dfrac{1}{cos^2\,(arc\,tg\,x)}} = cos^2\,(arc\,tg\,x)$$

Sea $y = arc\,tg\,x$, es decir, $tg\,y = x$. Entonces:

$$\frac{sen\,y}{cos\,y} = x \Rightarrow \frac{sen^2\,y}{cos^2\,y} = x^2 \Rightarrow \frac{1 - cos^2\,y}{cos^2\,y} = x^2$$

$$\Rightarrow 1 - cos^2\,y = x^2\,cos^2\,y$$

$$\Rightarrow 1 = cos^2\,y\,(1 + x^2)$$

$$\Rightarrow cos^2\,y = \frac{1}{1 + x^2}$$

con lo cual obtenemos:

$$(arc\,tg)'(x) = cos^2\,(arc\,tg\,x) = cos^2\,y = \frac{1}{1 + x^2}$$

Es importante notar que en estos tres ejemplos hemos visto que las derivadas de las funciones trigonométricas inversas (cuyas definiciones fueron geométricas) son funciones definidas a partir sólo de las propiedades básicas de los números reales (a saber, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $\frac{1}{1+x^2}$). Este hecho es el que nos permitirá dar, en el Apéndice al Capítulo 8, una definición de las funciones trigonométricas a partir de sus funciones inversas que, en ultimísima instancia, sólo parta de las catorce propiedades básicas de los números reales.

Desde luego, ha aumentado considerablemente el número de funciones que podemos derivar, por lo que es oportuno detenerse a resolver algunos ejercicios.

EJERCICIOS

1

■ a) Si $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ es derivable en (a, b) con derivada positiva en todo punto y si $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$, entonces f es biyectiva, f^{-1} es derivable y $(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$ (Usar 7.13. y 7.14.).

■ b) Misma conclusión si f tiene derivada negativa en todo punto y $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to b^-} f(x) =$ $= -\infty$ (Usar 7.13. y 7.14.).

2

Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} \sim \{a\}$ y existe $\lim_{x \to a} f'(x) = k$, entonces f es derivable en a y además $f'(a) = k$ (Usar 7.9. para calcular las derivadas laterales).

3

★ *a) Probar que si* $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ *es derivable en todo punto y* $f'(x) \geq 0$ *para todo* $x \in (a, b)$, *entonces f es creciente (o sea,* $x < x'$ *implica* $f(x) \leq f(x')$*).*

★ *b) Probar que si f es creciente y derivable, entonces* $f'(x) \geq 0$ *para todo x en el dominio de f.*

★ *c) Probar que si* $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ *es derivable en todo punto y* $f'(x) \leq 0$ *para todo* $x \in (a, b)$, *entonces f es decreciente (o sea,* $x < x'$ *implica* $f(x) \geq f(x')$*).*

★ *d) Probar que si f es decreciente y derivable, entonces* $f'(x) \leq 0$ *para todo x en el dominio de f.*

★ *e) Dar un ejemplo de una función* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *estrictamente creciente y derivable pero que no cumpla* $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

4

Probar que la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2}$ satisface $f(1) = f(5)$ pero que no existe $c \in (1, 5)$ tal que $f'(x) =$ $= 0$. ¿Por qué no se puede aplicar el Teorema de Rolle?

5

Sea $f(x) = (x - 1)\,x\,(x + 2)\,(x + 5)$. Probar que $f'(x)$ tiene tres raíces reales.

6

Encontrar el valor medio c del Teorema 7.9. para las funciones $f(x) = 3x$, $f(x) = 2x^2$ *y* $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

7

Probar las siguientes afirmaciones:

♦ a) La función f dada por $f(x) = \cot g\, x$ es biyectiva de $(0, \pi)$ en R y su inversa, arc cotg, tiene derivada:

$$(\operatorname{arc\,cotg})'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

♦ b) La función f dada por $f(x) = \operatorname{sh} x$ (ver Ejercicio 5 del parágrafo 7.2.) es biyectiva de R en R y su inversa, arg sh x, tiene derivada:

$$(\operatorname{arg\,sh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

♦ c) La función f dada por $f(x) = \operatorname{ch} x$ es biyectiva de $[0, +\infty)$ en $[1, +\infty)$ y su inversa, arg ch x, tiene derivada:

$$(\operatorname{arg\,ch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

♦ d) La función f dada por $f(x) = \operatorname{th} x$ es biyectiva de R en $(-1, 1)$ y su inversa, arg th, tiene derivada:

$$(\operatorname{arg\,th})'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

8

Hallar $f'(x)$ *siendo* $f(x)$ *igual a:*

- *a)* $\operatorname{arc\,sen} \sqrt{x}$
- *b)* $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{th} x)$
- *c)* $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th} \frac{x}{2})$
- *d)* $(e^{\operatorname{arc\,sen} \frac{1}{x}})^x$
- *e)* $\sqrt[3]{\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)}$
- *f)* $\operatorname{arg\,sh}(\operatorname{ch} x)$
- *g)* $\operatorname{arg\,sh} x^{\operatorname{arg\,th} x}$
- *h)* $\frac{\operatorname{arg\,sh} x}{\operatorname{arc\,sen} x}$
- *i)* $\operatorname{arg\,sh}(\operatorname{arc\,sen} x)$
- *j)* $\operatorname{arg\,ch} x^3$
- *k)* $\operatorname{arg\,th}(\operatorname{sen}^2 e^x)$
- *l)* $\ell n \operatorname{arc\,cos} x$

7.4. REGLA DE L'HOSPITAL

Vamos a ver ahora una consecuencia del Teorema 7.10. del Valor Medio de Cauchy que resulta de mucha utilidad en el cálculo de límites.

PROPOSICION 7.15.
(REGLA DE L'HOSPITAL; CASO $\frac{0}{0}$)

Sean f y g funciones definidas y derivables en un intervalo (a, b). Para $x_0 \in (a, b)$, supongamos $g'(x) \neq 0$ para $x \in (a, b), x \neq x_0$ y $f(x_0) = g(x_0) = 0$. En esas condiciones, si existe $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (límite finito), entonces existe $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración

Sea $\ell = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$; entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| < \epsilon \qquad (15)$$

(desde luego, hay que tomar $\delta \leqslant b - x_0$ y $\delta \leqslant x_0 - a$ para que f' y g' estén definidas en $0 < |x - x_0| < \delta$). Observemos que, al ser $g(x_0) = 0$, debe ser $g(x) \neq 0$ para $x \in (a, b), x \neq x_0$ (si para un $x \neq x_0$ es $g(x) = 0$, entonces el Teorema 7.9. nos dice que existe c entre x y x_0 tal que $g'(c) = 0$, contra las hipótesis que hemos hecho).

Ahora bien, para $0 < |x - x_0| < \delta$, es:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \quad \text{(por Teorema 7.10.)}$$

$$= \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

donde c está entre x y x_0 (o sea, $c \in (x_0, x)$ si $x_0 < x$, o $c \in (x, x_0)$ si $x < x_0$). En particular, será $0 < |c - c_0| < \delta$, y entonces:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell\right| < \epsilon \qquad \text{(por (15))}$$

lo cual prueba lo afirmado. ///

Veamos algunos ejemplos de aplicación de este resultado.

EJEMPLO 1

Calculemos $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ell n\, x}{x - 1}$; tanto el numerador como el denominador valen 0 en $x = 1$, luego estamos en las condiciones de 7.15. Como $(\ell n\, x)' = 1/x \to 1$ y $(x-1)' = 1 - 0 = 1 \to 1$, entonces, por 7.15.:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ell n\, x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = 1$$

EJEMPLO 2

La regla de L'Hospital puede aplicarse en forma iterada. Por ejemplo, para calcular $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (que otra vez es del tipo $\frac{0}{0}$), observamos que $(1 - \cos x)' = 0 - (-\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x \to 0$ y que $(x^2)' = 2x \to 0$. No hemos resuelto el problema, ya que sigue siendo del tipo 0/0. Entonces derivando el numerador otra vez, obtenemos $(\operatorname{sen} x)' = \cos x \to 1$ y derivando el denominador, $(2x)' = 2 \to 2$.

Luego es $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. La justificación del razonamiento hecho sería así:

"Es $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ por 7.15.

Ahora, sabiendo que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2}$, es:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2} \text{ por 7.15."}$$

En la práctica, aunque no sea el colmo de la forma-

lidad, conviene tratar estos ejemplos de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

El mecanismo anterior se puede aplicar en el caso ∞/∞:

PROPOSICION 7.15.
(REGLA DE L'HOSPITAL; CASO ∞/∞)

Sean f y g funciones definidas y derivables en un intervalo (a, b), salvo en $x_0 \in (a, b)$ y supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ y que $g'(x) \neq 0$ para $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$.

En esas condiciones, si existe $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (límite finito), entonces existe $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración

Observemos que en algún intervalo abierto (c, d) alrededor de x_0 es $g(x) \neq 0$. En efecto, si no fuese así, habría $x, x' \in (a, b)$, distintos entre sí y de x_0, tales que $g(x) = g(x') = 0$. Luego (por 7.8.), habría un punto intermedio p entre x y x' tal que $g'(p) = 0$, contra lo supuesto.

Sea $\ell = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$; entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que, para $0 < |x - x_0| < \delta_1$, es:

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| < \frac{\epsilon}{4}$$

Sea $x_1 = x_0 + \delta_1$; entonces, para $0 < x - x_0 < \delta_1$:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| = \left|\frac{f(x) - \ell . g(x)}{g(x)}\right| =$$

$$= \frac{|f(x) - f(x_1) + f(x_1) - \ell . g(x) + \ell . g(x_1) - \ell . g(x_1)|}{|g(x)|}$$

$$= \frac{|f(x) - f(x_1) - \ell(g(x) - g(x_1)) + f(x_1) - \ell g(x_1))|}{|g(x)|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|f(x) - f(x_1) - \ell(g(x) - g(x_1))|}{|g(x)|} +$$

$$+ \frac{|f(x_1) - \ell g(x_1)|}{|g(x)|} = (*)$$

Por Teorema 7.10., es, para algún c entre x y x_1

$$(f(x) - f(x_1))g'(c) = (g(x) - g(x_1))f'(c)$$

de donde

$$f(x) - f(x_1) = (g(x) - g(x_1))\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Reemplazando:

$$(*) = \frac{\left|(g(x) - g(x_1))\frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell(g(x) - g(x_1)\right|}{|g(x)|} +$$

$$+ \frac{|f(x_1) - \ell g(x_1)|}{|g(x)|} =$$

$$= \left|\frac{g(x) - g(x_1)}{g(x)}\right| \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell\right| + \frac{|f(x_1) - \ell g(x_1)|}{|g(x)|} <$$

$$< \left|1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right| . \frac{\epsilon}{4} + \frac{|f(x_1) - \ell g(x_1)|}{|g(x)|} = (**)$$

ya que $x < c < x_1$ y $0 < x - x_0 < \delta_1$ (con lo cual $0 < c - x_0 < \delta_1$; recordar quien es x_1).

Ahora bien, dado el $\epsilon > 0$, el x_1 tomado es fijo. Como $g(x) \to \infty$ para $x \to x_0$ entonces $1 - \frac{g(x_1)}{g(x)} \to 1$ cuando $x \to x_0$; luego, existe $\delta_2 > 0$ ($\delta_2 < \delta_1$) tal que, para $0 < x - x_0 < \delta_2$, $\left|1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right| < 2$.

Análogamente, como x_1 es fijo y $g(x) \to \infty$ para $x \to x_0$, existe $\delta_3 > 0$ ($\delta_3 < \delta_1$) tal que, para $0 < |x - x_0| < \delta_2$, $\frac{|f(x_1) - \ell g(x_1)|}{|g(x)|} < \frac{\epsilon}{2}$.

Por lo tanto, si $\delta = \min(\delta_2, \delta_3)$ y $0 < x - x_0 < \delta$:

$$(**) < 2 . \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

y como esto se puede hacer para todo $\epsilon > 0$, se deduce que $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. Análogamente se prueba que el límite por la izquierda es ℓ. ///

Veamos un ejemplo de aplicación de este caso:

EJEMPLO 3

Tratemos de calcular (si existe), $\lim_{x\to 0} x . \ell n\, x$. A primera vista, este no es un límite del tipo estudiado recién (es de la forma $0 . \infty$). Pero es fácil llevarlo a esa forma: $x . \ell n\, x = \frac{\ell n\, x}{1/x}$. Entonces:

$$\lim_{x\to 0} x . \ell n\, x = \lim_{x\to 0} \frac{\ell n\, x}{1/x} = \qquad \text{(por 7.15.)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} (-x) =$$

$$= 0$$

La regla de L'Hospital también puede aplicarse a los casos en los que la variable x tiende a infinito (ver Ejercicio 1 de este parágrafo). Suponiendo esto cierto, vemos dos ejemplos.

EJEMPLO 4

Calculamos $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ell n\, x}{x}$; es:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ell n\, x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

EJEMPLO 5

Calculamos $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{e^x}$; es:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x + 2}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

EJERCICIOS

1

◆ a) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, entonces $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

(SUGERENCIA: estudiar $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$).

◆ b) Si $\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, entonces $\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

(SUGERENCIA: imitar 7.15. *mutatis mutandis*).

♦ c) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

(Usar b)).

♦ d) Enunciar y demostrar todos los casos posibles de aplicación de la regla de L'Hospital (que $x \to \pm\infty$, o que el límite sea $\pm\infty$, o que $x \to x_0^+$, o $x \to x_0^-$, etc.). (Por lo menos enunciarlos todos y demostrar alguno).

2

Calcular los siguientes límites:

- a) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x}$
- b) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \text{sen}\, x}{x^3}$
- c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$
- d) $\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$
- e) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, 5x}{x}$
- f) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{3x^2+2x-5}$
- g) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-\text{sen}\, x}$
- h) $\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$
- i) $\lim_{x\to 1} \frac{\ell n\, x}{x-1}$
- j) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\, x - x}{x - \text{sen}\, x}$
- k) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ell n(\text{sen}\, x)}{\pi - 2x}$
- l) $\lim_{x\to a} \frac{\text{sen}\, x - \text{sen}\, a}{x-a}$
- m) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\, x - \text{sen}\, x}{\text{sen}^2 x}$
- n) $\lim_{x\to 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$ $(a > 0)$
- o) $\lim_{x\to 0} \frac{\ell n\, x}{\text{cotg}\, x}$
- p) $\lim_{x\to 0} \frac{\ell n(\text{sen}\, x)}{\ell n(\text{tg}\, x)}$
- q) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ell n\, x}{x^4}$
- r) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$
- s) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^n}$
- t) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x + \ell n\, x}{x\, \ell n\, x}$
- u) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ell n\, x}{e^x}$
- v) $\lim_{x\to \infty} \frac{\text{sen}\, 1/x}{1/x}$
- w) $\lim_{x\to 0} x^2\, \ell n\, x$
- x) $\lim_{x\to \infty} x \,.\, \text{sen}\, \frac{1}{x}$
- y) $\lim_{x\to 0} (x - \text{sen}\, x)\, \ell n\, x$
- z) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}\right)$

3

Para calcular $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ *en los casos de indeterminación* $(1^\infty, 0^0, \infty^0)$ *suele ser útil calcular el logaritmo de dicho límite:* $\ell n \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \ell n\, f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} g(x)\, \ell n\, f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{\ell n\, f(x)}{1/g(x)}$ *y aplicar, si se puede, L'Hospital. Si el límite resulta ser* ℓ*, el límite original, desde luego, será* e^ℓ.

Aplicar ese procedimiento para calcular los siguientes límites:

- ★ *a)* $\lim_{x\to 0} x^{\text{sen}\, x}$
- ★ *b)* $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$
- ★ *c)* $\lim_{x\to \infty} (1+x)^{1/x}$
- ★ *d)* $\lim_{x\to 0^+} (-\ell n\, x)^x$
- ★ *e)* $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\text{tg}\, x}{x}\right)^{1/x^2}$
- ★ *f)* $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\text{sen}\, x)^{\text{tg}\, x}$
- ★ *g)* $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\ell n\, x}{x}\right)^{1/x}$
- ★ *h)* $\lim_{x\to 0} x^x$
- ★ *i)* $\lim_{x\to 0} x^{x^x}$

4

■ a) Probar que $\lim_{x\to 0} \frac{x^2\, \text{sen}\, 1/x}{\text{sen}\, x} = 0$ sin usar L'Hospital. ¿Qué sucede si se aplica L'Hospital? ¿Qué deduce usted respecto a la recíproca de 7.14.?

■ b) Idem para $\lim_{x\to\infty} \frac{x + \text{sen}\, x}{x + \cos x}$.

7.5. ESTUDIO DE FUNCIONES

Vamos a mostrar, en este parágrafo, cómo lo que hemos aprendido acerca de la derivada nos resulta de suma utilidad para hacer representaciones gráficas de funciones. Comenzamos dando una definición.

DEFINICION 7.16.

Un punto x_0 se dice *mínimo local* de la función f si existe $\delta > 0$ tal que x_0 es mínimo de f en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (en el sentido de la definición dada en el parágrafo 7.3.). Análogamente, x_0 es *máximo local* de f si existe $\delta > 0$ tal que x_0 es máximo de f en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

De esta manera, que x_0 sea mínimo local de f significa que, para algún $\delta > 0$, es $f(x_0) \leqslant f(x)$ si $|x - x_0| < \delta$; eso *no* significa que sea $f(x_0) \leqslant f(x)$ para todo x en el dominio de definición de f, es decir, $f(x_0)$ no tiene por qué ser el mínimo *absoluto* de f. Análogamente para máximo local. En la figura adjunta, x_0' y x_0''' son mínimos locales pero no absolutos ($f(a)$ es más chico que $f(x_0')$ y $f(x_0''')$) y x_0 y x_0'' son máximos locales pero no absolutos ($f(b)$ es más grande que $f(x_0)$ y que $f(x_0'')$).

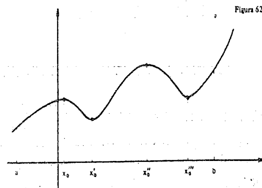


Figura 62

Diremos que x_0 es *extremo local* si es mínimo local o máximo local.

Deducimos una consecuencia inmediata del Teorema de Fermat (Teorema 7.7.):

PROPOSICION 7.17.

Si x_0 es extremo local de f y f es derivable en x_0, entonces:

$$f'(x_0) = 0$$

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración

Al ser x_0 extremo local de f, existe $\delta > 0$ tal que, en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, x_0 es máximo o mínimo de f. Luego f restringida a $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ está en las condiciones del Teorema 7.7., así que es $f'(x_0) = 0$. ///

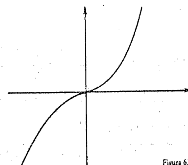


Figura 63

La recíproca de la Proposición 7.17. (si $f'(x_0) = 0$, entonces x_0 es extremo local de f) *no* es cierta. Para verlo, basta apelar al ejemplo de la función f dada por $f(x) = x^3$ y tomar $x_0 = 0$.

Como $f'(x) = 3x^2$, entonces $f'(0) = 0$ y, sin embargo, $x_0 = 0$ no es extremo local de f (cualquiera sea $\delta > 0$, en $(-\delta, 0)$ es $f(x) < 0 = f(0)$ y en $(0, \delta)$ es $f(x) > 0 = f(0)$). Entonces la nulidad de la derivada en un punto es condición ***necesaria*** para que dicho punto sea un extremo local, pero no es condición ***suficiente***.

Vamos a dar una condición suficiente para que un punto sea extremo local. Digamos previamente que si f es una función derivable en algún intervalo abierto entonces, como hemos visto en el parágrafo 7.2., tenemos la función derivada f', definida en ese intervalo abierto. Esta función f' también puede ser derivable; en caso de que así sea, su derivada se indica f'' y se denomina ***derivada segunda*** de f.

PROPOSICION 7.18.

Supongamos que x_0 es un punto del dominio de f tal que $f'(x_0) = 0$ y tal que $f''(x_0) \neq 0$. Entonces:

a) si $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 es mínimo local de f;

b) si $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es máximo local de f.

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración

Notemos que, para que se pueda hablar de derivada segunda en x_0, la función f debe tener derivada primera en un intervalo abierto alrededor de x_0 (Ver Definición 7.1.).

● a) Siendo $f''(x_0) > 0$, entonces es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h)}{h} > 0 \qquad \text{(recordar } f'(x_0) = 0)$$

Luego, por Proposición 6.3., existe $\delta > 0$ tal que, para $0 < |h| < \delta$:

$$\frac{f'(x_0+h)}{h} > 0$$

Entonces el numerador debe tener el mismo signo que el numerador, es decir:

si $0 < h < \delta$, entonces $f'(x_0+h) > 0$

si $-\delta < h < 0$, entonces $f'(x_0+h) < 0$

Pero esto es lo mismo que decir que f' es positiva en $(x_0, x_0+\delta)$ y negativa en $(x_0-\delta, x_0)$. Luego, por Proposición 7.13., f es estrictamente creciente en $[x_0, x_0+\delta)$ y estrictamente decreciente en $(x_0-\delta, x_0]$. Esto implica inmediatamente que x_0 es mínimo de f en $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, con lo cual x_0 es mínimo local de f.

● b) Razonamiento análogo (Hacerlo.). ///

Esta proposición resulta útil para resolver algunos problemas de aplicación, de los cuales vamos a dar un ejemplo:

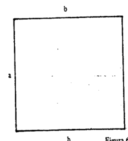


Figura 64

De todos los rectángulos con perímetro dado, queremos encontrar aquel que tenga área máxima. Si llamamos 2ℓ al perímetro (fijo) que deben tener los rectángulos en cuestión, entonces habría dos lados (opuestos) que miden a y otros dos que miden b y debe ser

$a + b + a + b = 2\ell$, o sea $a + b = \ell$. El área del rectángulo está medida por $a \cdot b$, y siendo $a + b = \ell$, será $a = \ell - b$, con lo cual el área del rectángulo estará dada por $(\ell - b)\, b$. Para encontrar su máximo, llamamos $x = b$ y consideramos la función

$$f(x) = (\ell - x)\, x = \ell x - x^2$$

Su derivada es:

$$f'(x) = \ell - 2x$$

y esta derivada vale cero para $x_0 = \dfrac{\ell}{2}$, que es el máximo buscado. En efecto:

$$f''(x_0) = -2 < 0$$

Luego, por 7.13., el área del rectángulo es máximo cuando $x_0 = \dfrac{\ell}{2}$; en ese caso, $a = \ell - b = \ell - x_0 = \ell - \dfrac{\ell}{2} = \dfrac{\ell}{2} = b$, con lo cual el rectángulo es un cuadrado. Por lo tanto, la solución a nuestro problema es: de todos los rectángulos de perímetro fijo, el que tiene área máxima es el cuadrado.

(Para más ejemplos de este tipo de problemas, ver los Ejercicios 1 a 8).

Es importante notar que las condiciones $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ son *suficientes* para que x_0 sea mínimo local pero no *necesarias*. Por ejemplo, la función dada por $f(x) = x^4$ tiene un mínimo en $x_0 = 0$ (pues en cualquier otro punto es positiva y en 0 vale 0), pero $f''(x_0) = 4 \cdot 3x_0^2 = 12x_0^2 = 12 \cdot 0^2 = 0$, así que *no* es $f''(x_0) < 0$.

Veamos ahora cómo se traduce analíticamente una cuestión geométrica referida a la representación gráfica de funciones. En la figura indicamos lo que entendemos, geométricamente, por ***cóncavo*** y ***convexo***.

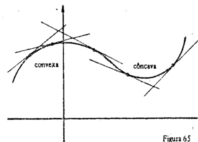


Figura 65

Se podría caracterizar, por ejemplo, la zona de concavidad como aquella en que la cuerda que une dos puntos de la curva está por encima de la curva, y la zona de convexidad como aquella en que dicha cuerda está por debajo de la curva.

Si la función es derivable, hay una manera muy sencilla de caracterizar la concavidad y la convexidad: en las zonas cóncavas, a medida que aumenta x, aumenta la pendiente de la tangente, es decir, aumenta $f'(x)$. Y en las zonas convexas, a medida que aumenta x, decrece $f'(x)$. Sacamos entonces la siguiente conclusión (teniendo en cuenta 7.13.):

Si $f''(x) > 0$ en (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava en (a, b).

Si $f''(x) < 0$ en (a, b), entonces la gráfica de f es convexa en (a, b).

Un punto en donde la curva cambia de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se denomina *punto de inflexión*. De lo recién indicado deducimos que si x_0 es un punto de inflexión, entonces $f''(x_0) = 0$. La recíproca no es cierta: la función dada por $f(x) = x^4$ tiene derivada segunda nula en $x_0 = 0$, pero el 0 no es un punto de inflexión (la representación gráfica es cóncava en todo $\mathbb{R}$).

Resumimos ahora toda la información cuya obtención puede ser útil para la representación gráfica de una función y después damos un ejemplo.

★ 1. Hallar el dominio de la función. Si f no está definida en x_0 pero sí en (a, x_0) y (x_0, b) para ciertos a y b, hallar $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

★ 2. Hallar los puntos x_0 en los cuales sea $f'(x_0) = 0$. Si $f''(x_0) < 0$, x_0 es máximo local; si $f''(x_0) > 0$, x_0 es mínimo local. (Si $f''(x_0) = 0$, no se sabe.) Calcular $f(x_0)$.

★ 3. Hallar los intervalos en los cuales $f'(x) > 0$; en ellos f será estrictamente creciente. Hallar los intervalos en los cuales $f'(x) < 0$; en ellos f será estrictamente decreciente.

★ 4. Hallar los intervalos en los cuales sea $f''(x) > 0$; en ellos la gráfica será concava. Hallar los intervalos en los cuales sea $f''(x) < 0$; en ellos la gráfica será convexa. (Una indicación que puede ser útil: si x_0 y x_1 son dos puntos consecutivos de inflexión y hay derivada segunda en (x_0, x_1), entonces la gráfica es cóncava en todo (x_0, x_1) o convexa en todo (x_0, x_1). Luego basta elegir un punto de (x_0, x_1) y ver cuánto vale f'' en ese punto.)

★ 5. Hallar $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

★ 6. Hallar los x en donde sea $f(x) = 0$, los x en donde sea $f(x) > 0$ y los x en donde sea $f(x) < 0$.

Si se pueden conseguir todos esos datos (más los que al lector se le ocurra conseguir), es probable que se esté en condiciones de trazar la gráfica aproximada de la función.

Veamos un ejemplo; consideremos la función f dada por:

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

Su dominio es claramente todo $\mathbb{R}$, vale cero en $x = 0$ y es positiva en todo otro punto.

Sus derivadas primera y segunda resultan ser:

$$f'(x) = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2 - 6x^2}{(1 + x^2)^3}$$

Entonces es $f'(x) = 0$ solo para $x = 0$. Como $f''(0) = 2 > 0$, entonces f tiene un mínimo en $x_0 = 0$. El valor de la función en ese mínimo es $f(0) = 0$.

La derivada $f'(x)$ es positiva para $x > 0$ y negativa para $x < 0$. Luego f es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$.

La derivada $f''(x)$ es cero para $x = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cong \pm 0.57$, es mayor que cero para $2 - 6x^2 > 0$, o sea para $|x| < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y menor que cero para $|x| > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Luego la gráfica es cóncava en $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y convexa en $(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3})$ y $(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$. Desde luego, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ son puntos de inflexión.

El límite para $x \to \infty$ de $f(x)$ es 1, como se puede observar dividiendo numerador y denominador por x^2.

CAPITULO VIII

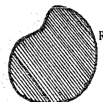
La Integral Definida

Ahora vamos a estudiar el concepto que, junto con el de derivada, forma el núcleo del Cálculo Diferencial e Integral. Veremos que dicho concepto, el de integral, será definido por motivos totalmente ajenos a los que nos llevaron a definir la derivada, pero veremos su íntima conexión en el llamado Teorema Fundamental del Cálculo.

Dicha conexión será explotada en el Capítulo 9.

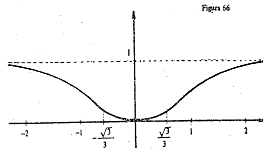
8.1. FUNCIONES INTEGRABLES

La noción de integral definida, tal como la vamos a presentar, aparece naturalmente cuando se intenta resolver el problema del cálculo del área de una región plana. El lector recordará haber estudiado el área de ciertas figuras particulares: el rectángulo, el triángulo, el círculo, etc. Pero si consideramos una región $\mathbf{R}$ como la de la figura, se entenderá que no solo el cálculo de su área aparece como un problema complicado; si le fuese preguntada al lector la definición de dicha área, qué es lo que entiende por el área de una región plana cualquiera, probablemente se vería envuelto en más dificultades de las que podría resolver.



No vamos a ver aquí una definición formal de área; descansaremos, en cambio, en la noción geométrica,

Con toda esta información, trazamos la gráfica de esta función:



En este caso particular, una información extra de utilidad es que la función en cuestión es par, por lo cual su gráfica debe ser simétrica respecto al eje de ordenadas.

EJERCICIOS

1

Hallar el rectángulo de área máxima inscripto en la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

2

Dada una hoja cuadrada de lado 2a, determinar las dimensiones de la caja de volumen máximo y de base cuadrada que se puede construir con ella.

3

Hallar el triángulo rectángulo de perímetro dado que tenga mayor área.

4

Probar que $(1 + x)(a + 1 - x) \leqslant \frac{1}{4}(a + 2)^2$.

5

Hallar el cilindro de volumen dado que tenga mayor área.

6

De los números cuya diferencia es 20, hallar aquellos dos cuyo producto sea el menor posible.

7

Encontrar las coordenadas, del o los puntos de la curva $y = 2x^2$ que estén más cerca del punto (4, 0).

8

Hallar tres números positivos cuya suma sea 30, que verifiquen además que el primero más el doble del segundo más el triple del tercero sumen 60 y cuyo producto sea el mayor posible.

9

Probar que en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ vale $\frac{2}{\pi}x \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant$ $\leqslant x$.

10

Hallar los extremos de la función f, siendo f (x) igual a:

- a) $x^2 - 12x + 5$
- b) $x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 2$
- c) $\frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$
- d) $\frac{1}{x^2 + 2x + 2}$
- e) $(1 + x)^{1/2}(1 - x)^{3/2}$
- f) $x + \frac{1}{x}$
- g) $x e^x$
- h) $x \ln x$
- i) $x e^{-x}$
- j) $\frac{3x^2 + 7x + 7}{x^2 + x + 1}$
- k) $\frac{x}{(4 + x)(1 + x)}$
- l) $\frac{(x + 2)^2}{(x + 3)^3}$
- m) $\frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$
- n) $\frac{x(x^2 + 1)}{x^4 - x^2 + 1}$
- o) $\sqrt{1 - x^2}$
- p) $\frac{1}{1 + x^2}$

11

Hallar los puntos de inflexión y las zonas de concavidad y convexidad de la función f, siendo f (x) igual a:

- *a)* $\frac{x^3}{4 + x^2}$
- *b)* $4 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$
- *c)* x^2
- *d)* x^3
- *e)* $x^n, n \geqslant 1$
- *f)* $1 + (x - 2)^3$
- *g)* $ax^2 + bx + c$
- *h)* $ax^3 + bx^2 + cx + d$
- *i)* $\sqrt[3]{x - 2}$
- *j)* $\frac{5}{6 + x^2}$
- *k)* $\frac{a}{b + x^2}$
- *l)* $\frac{x^3}{a^2 + x^2}$
- *m)* $x e^x$
- *n)* $\sqrt{\frac{a - x}{x}}$

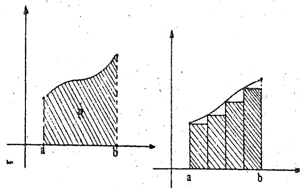
12

Estudiar el dominio, los ceros, los intervalos de positividad y negatividad, los de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos, los puntos de inflexión, los intervalos de concavidad y convexidad y trazar la gráfica aproximada de la función f, siendo f (x) igual a:

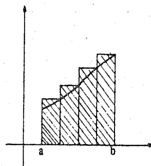
- a) $\cos x$
- b) $\operatorname{sen} x$
- c) $\operatorname{tg} x$
- d) e^x
- e) $\operatorname{sh} x$
- f) $\operatorname{ch} x$
- g) $\operatorname{arc\,cos} x$
- h) $\operatorname{arc\,sen} x$
- i) $\operatorname{arc\,tg} x$
- j) $\operatorname{Arg\,sh} x$
- k) $\operatorname{Arg\,ch} x$
- l) e^{-x^2}
- m) $\ln x$
- n) $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$
- o) $\frac{16}{x^2(x - 4)}$
- p) $\sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$
- q) $\frac{x}{\ln x}$
- r) $\frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$
- s) $\ln(x^2 - 1) + \frac{1}{x^2 - 1}$
- t) $\frac{x^2 + 2}{x^2 + 5}$
- u) $0,5^x$
- v) $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

casi diríamos física, que el lector debe tener y que le permitirá darse cuenta de que nuestros cálculos van bien encaminados en la solución del problema de medir el área de una familia muy amplia de figuras planas.

Pasemos a ver cuáles son esas figuras. Consideremos una función f: [a, b] → R, por el momento continua y positiva, y su representación gráfica en el plano; queremos averiguar el área de la región rayada, es decir de la región R comprendida entre dicha representación, el eje de abscisas y las rectas verticales por los puntos de coordenadas (a, 0) y (b, 0).



Si dividimos el intervalo [a, b] en una familia finita de puntos y en cada uno de los intervalitos que quedan determinados consideramos el rectángulo de base el intervalito en cuestión y de altura el *menor* valor de la función en el intervalito, entonces la suma de las áreas de los rectángulos así determinados nos da una medida aproximada del área de la región R (una aproximación *por defecto,* ya que dicha suma es menor que el área de R). Análogamente, si en los mismos intervalitos consideramos los rectángulos de base el intervalito en cuestión y de altura el *mayor* valor de la función en el intervalito, entonces la suma de las áreas de los rectángulos así determinados también nos da una medida aproximada del área de la región R (esta vez, una aproximación *por exceso,* ya que dicha suma es *mayor* que el área de R). Ahora lo que tenemos que hacer es aumentar la cantidad de puntos que determinan los intervalitos, de manera que éstos sean cada vez más chicos, y observar si las sumas por defecto y por exceso se aproximan a un mismo número; en caso de que así sea, dicho número debe ser la medida del área de R.



En el resto de este parágrafo lo que vamos a hacer es, esencialmente, poner en términos más precisos las nociones y procedimientos indicados. No nos limitaremos a funciones continuas y positivas; sólo pediremos, y por razones que enseguida se harán claras, que la función esté *acotada* en [a, b].

DEFINICION 8.1.

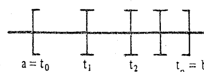
Sea [a, b] un intervalo cerrado de R (desde luego, a < b). Una *partición* de [a, b] es una familia finita $\pi = [t_0; t_1; \dots; t_n]$ de puntos tales que:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Para cada partición $\pi = [t_0, t_1, \dots, t_n]$ de [a, b], tenemos determinados los intervalitos:

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$$



o, más brevemente, $[t_{i-1}, t_i]$ $(1 \leq i \leq n)$.

Ahora definimos con precisión las sumas por defecto y por exceso antes indicadas.

DEFINICION 8.2.

Sea f: [a, b] → R una función *acotada.* Si $\pi = [t_0, t_1, \dots, t_n]$ es una partición de [a, b], para cada i tal que $1 \leq i \leq n$ sean:

$$M_i = \sup [f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]]$$

$$m_i = \inf [f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]]$$

Llamaremos *suma inferior para* f *correspondiente a* π a la suma:

$$s_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1})$$

y *suma superior para* f *correspondiente a* π a la suma:

$$S_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1})$$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Hagamos algunas observaciones respecto a esta definición:

- 1) Al no pedir que f sea continua sino solamente acotada, puede no haber un *máximo* valor de f en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ (si fuese continua, existiría tal máximo por el Teorema 6.26.), pero es seguro que existe un *supremo* para el conjunto de los valores f(x) que toma la función cuando x recorre el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ (pues ese conjunto, evidentemente no vacío, está acotado; eso quiere decir que f sea acotada).

Análogamente para el uso del ínfimo en lugar del mínimo;

- 2) como el área de un rectángulo está medida por el producto de la base (o sea $t_i - t_{i-1}$) por la altura (m_i o M_i según el caso), entonces las sumas inferior y superior corresponden a la suma de las áreas de los rectángulos de que hablábamos antes;

- 3) como $m_i \leq M_i$ para todo i, entonces $s_\pi(f) \leq S_\pi(f)$ cualquiera sea la partición π.

Una vez que hemos definido las sumas por defecto y por exceso (a partir de ahora, sumas inferior y superior), pasamos a describir el procedimiento de tomar cada vez más divisiones de [a, b], lo que llamaremos *afinar* las particiones:

DEFINICION 8.3.

Una partición π de [a, b] se dice *más fina* que otra partición π' de [a, b] si $\pi' \subset \pi$, es decir, si todo punto de π' es un punto de π.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Así, por ejemplo, $\pi' = [1; 1,2; 1,4; 1,7; 2]$ es una

partición de $[1,2]$ y $\pi=[1;1,1;1,2;1,3;1,4;1,6;1,7;2]$ es otra partición de $[1, 2]$ más fina que π'; pero $\pi'' = [1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 2]$ es una tercera partición de $[1, 2]$ que *no* es más fina que π' (pues $1,4 \in \pi'$ y $1,4 \notin \pi''$).

Necesitamos ahora conocer el comportamiento de las sumas inferior y superior a medida que afinamos la partición. La respuesta es sencilla:

PROPOSICION 8.4.

Si π y π' son particiones de $[a, b]$ y π es más fina que π', entonces para toda función acotada $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ será:

$$s_{\pi'}(f) \leqslant s_{\pi}(f)$$

$$S_{\pi'}(f) \geqslant S_{\pi}(f)$$

(es decir, las sumas inferiores crecen y las superiores decrecen a medida que se afina la partición).

Demostración

Sea $\pi' = [t_0, t_1, \ldots, t_n]$ y supongamos primero que π tiene *un* punto más que π', es decir, $\pi = [t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}, c, t_k, \ldots, t_n]$ para un cierto $c \in (t_{k-1}, t_k)$.

Entonces será, para $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada:

$$S_{\pi'}(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

$$S_{\pi}(f) = \sum_{i=1}^{k-1} M_i(t_i - t_{i-1}) + M'_k(c - t_{k-1}) + M''_k(t_k - c) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}),$$

donde

$$M_i = \sup[f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]] \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

$$M'_k = \sup[f(x): x \in [t_{k-1}, c]]$$

$$M''_k = \sup[f(x): x \in [c, t_k]]$$

Por lo tanto, será (ya que casi todo se simplifica):

$$S_{\pi'}(f) - S_{\pi}(f) = M_k(t_k - t_{k-1}) - M'_k(c - t_{k-1}) - M''_k(t_k - c) =$$

$$= M_k(t_k - c + c - t_{k-1}) - M'_k(c - t_{k-1}) - M''_k(t_k - c) =$$

$$= M_k(t_k - c) - M'_k(t_k - c) + M_k(c - t_{k-1}) - M''_k(c - t_{k-1}) =$$

$$= (M_k - M'_k)(t_k - c) + (M_k - M''_k)(c - t_{k-1}) \qquad (*)$$

Ahora bien, como $[t_{k-1}, c] \subset [t_{k-1}, t_k]$, entonces:

$$[f(x): x \in [t_{k-1}, c]] \subset [f(x): x \in [t_{k-1}, t_k]]$$

y, como cuando $A \subset B$ resulta $\sup A \leqslant \sup B$ (si $d = \sup B$, d es, en particular, cota superior de B, luego es cota superior de A por ser $A \subset B$, luego es mayor o igual que $\sup A$), entonces:

$$\sup[f(x): x \in [t_{k-1}, c]] \leqslant \sup[f(x): x \in [t_{k-1}, t_k]]$$

o sea:

$$M''_k \leqslant M_k$$

De la misma manera sale que $M'_k \leqslant M_k$ (usando que $[c, t_k] \subset [t_{k-1}, t_k]$)

Luego, por (*):

$S_{\pi'}(f) - S_{\pi}(f) \geqslant 0$ (es $t_k - c > 0$ y $c - t_{k-1} > 0$)

de donde $S_{\pi}(f) \leqslant S_{\pi'}(f)$. Un razonamiento análogo (¡hacerlo!) prueba que $s_{\pi}(f) \geqslant s_{\pi'}(f)$.

El caso general se sigue por inducción sobre el número n de elementos de π que no están en π': si $n = 0$, entonces $\pi = \pi'$ y vale la igualdad; si $n = 1$, ya lo acabamos de demostrar. Si vale para $n \geqslant 1$, supongamos que $\pi - \pi'$ tiene $n + 1$ elementos y sea c uno de ellos. Llamando $\pi'' = \pi - [c]$ resulta $S_{\pi''}(f) \leqslant S_{\pi'}(f)$ por hipótesis inductiva y $S_{\pi}(f) \leqslant S_{\pi''}(f)$ por el caso $n = 1$. Luego $S_{\pi}(f) \leqslant S_{\pi'}(f)$. La desigualdad $s_{\pi}(f) \geqslant s_{\pi'}(f)$ se prueba en forma similar.

Las sumas inferiores crecen y las superiores decrecen, pero toda suma inferior es menor o igual que toda suma superior:

PROPOSICION 8.5.

Si π y π' son particiones cualesquiera de $[a, b]$, entonces para toda función acotada $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es:

$$s_{\pi}(f) \leqslant S_{\pi'}(f)$$

Demostración

Sea $\pi'' = \pi \cup \pi'$ (la unión de los dos conjuntos). Entonces π'' es más fina que π y que π' y por lo tanto:

$s_{\pi}(f) \leqslant s_{\pi''}(f) \leqslant$ (por observación 3 a Definición 8.2.)

$\leqslant S_{\pi''}(f) \leqslant$ (por ser π'' más fina que π')

$\leqslant S_{\pi'}(f)$

que es lo que queríamos probar.///

Consideremos ahora una función acotada $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ que mantendremos fija. Para cada partición π de $[a, b]$ tenemos $s_{\pi}(f) \in \mathbb{R}$; el conjunto $[s_{\pi}(f): \pi$ partición de $[a, b]]$ formado por todas las sumas inferiores posibles para f, es entonces un subconjunto de $\mathbb{R}$, obviamente no vacío, y acotado superiormente por cualquier suma superior (por Proposición 8.5.). Luego existe su supremo. Análogamente, el conjunto $[S_{\pi}(f): \pi$ partición de $[a, b]]$ formado por todas las sumas superiores posibles para f, es no vacío y acotado inferiormente por cualquier suma inferior. Luego, tiene ínfimo. A este ínfimo y a aquel supremo les damos un nombre:

DEFINICION 8.6.

Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Llamaremos *integral inferior de* f *sobre* $[a, b]$ al número:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup[s_{\pi}(f): \pi \text{ partición de } [a, b]]$$

e *integral superior de* f *sobre* [a, b] al número:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S_\pi(f): \pi \text{ partición de } [a,b]\}$$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

DEFINICIÓN 8.7.

Sea f: [a, b] → R acotada. Decimos que f *es integrable sobre* [a, b] si las integrales inferior y superior de f sobre [a, b] coinciden, es decir, si:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

En caso de que así suceda, ese valor común se denomina *integral de* f *sobre* [a, b] y se indica:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Observemos que las integrales superior e inferior de f sobre [a, b] siempre existen (si f es acotada), pero no ocurre lo mismo con la integral (a secas) de f sobre [a, b]; ésta existe si y sólo si hay coincidencia entre $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ y $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

De la Proposición 8.5. deducimos rápidamente que siempre es:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \qquad (1)$$

(ver Ejercicio 1 de este parágrafo) y las funciones *no* integrables son aquellas para las cuales en (1) vale la desigualdad.

Como la integral entre a y b de f debe medir (para funciones positivas) el área entre la representación gráfica de f y el eje de abscisas, podría parecer extraña la posibilidad de que haya funciones no integrables, es decir, funciones para las cuales no tenga sentido geométrico la expresión "área entre la gráfica y el eje de abscisas". Enseguida vamos a ver un ejemplo (Ejemplo 2) que nos permitirá entender esta posibilidad.

Ejemplo 1

Sea f: [a, b] → R una función constante, es decir:

$$f(x) = c \text{ para todo } x \in [a,b]$$

Cualquiera sea la partición $\pi = [t_0, t_1, \ldots, t_n]$ de [a, b], es:

$$m_i = \inf[f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]] = c$$

$$M_i = \sup[f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]] = c$$

y por lo tanto:

$$s_\pi(f) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c\,(t_i - t_{i-1}) =$$

$$= c \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) =$$

$$= c\,(t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + t_3 - t_2 + \ldots + t_n - t_{n-1})$$

En esta suma, todos los términos se simplifican (t_1 con $-t_1$, t_2 con $-t_2$, etc.) salvo $-t_0$ y t_n. Luego:

$$s_\pi(f) = c\,(-t_0 + t_n) = c\,(-a + b) =$$

$$= c\,(b-a)$$

Exactamente igual resulta $S_\pi(f) = c\,(b-a)$. Luego el conjunto de sumas inferiores (así como el de sumas superiores) se reduce a un sólo número ($c\,(b-a)$), con lo cual su supremo (o su ínfimo) es ese mismo número. En otras palabras:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = c\,(b-a)$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = c\,(b-a)$$

Entonces la función constante es integrable y además:

$$\int_a^b c\,dx = c\,(b-a)$$

EJEMPLO 2

Consideremos la función f: [a, b] → R definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases} \qquad \text{(función de Dirichlet)}$$

Sea $\pi = [t_0, t_1, \ldots, t_n]$ una partición cualquiera de [a, b]. Entonces, para todo i, $1 \leqslant i \leqslant n$, es:

$$m_i = \inf[f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]] = 0$$

$$M_i = \sup[f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]] = 1$$

En efecto, entre t_{i-1} y t_i existen un racional c_i y un irracional d_i (Proposición 1.29. y ejercicio 5 del parágrafo 1.9.). Como $f(c_i) = 1$ y $f(d_i) = 0$, resulta que $[f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]] = \{0, 1\}$ (recordar que son los únicos valores que toma la función), con lo cual su ínfimo es 0 y su supremo es 1.

Entonces es:

$$s_\pi(f) = \sum_{i=1}^n m_i\,(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n 0.(t_i - t_{i-1}) = 0$$

$$S_\pi(f) = \sum_{i=1}^n M_i\,(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n 1.(t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = b - a$$

Luego $[s_\pi(f): \pi$ partición de $[a, b]]$ es un conjunto con un solo elemento (el cero) y lo mismo vale para $[S_\pi(f): \pi$ partición de $[a, b]]$ (su único elemento es $b-a$). En consecuencia:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0 \neq b - a = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

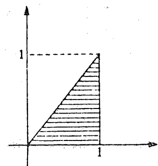
con lo cual la función de Dirichlet no es integrable sobre ningún intervalo (si el lector hace algunos intentos, vanos, de representar gráficamente esta función, se dará cuenta de que la noción de área entre la gráfica y el eje de abscisas no tiene, aquí, sentido).

EJEMPLO 3

Consideremos ahora la función f: [0, 1] → R definida por:

$$f(x) = x \quad \text{para todo} \quad x \in [0,1]$$

Como el área del triángulo es la base por la altura dividido 2, entonces la integral de esta función sobre [0, 1] debería ser $\frac{1.1}{2} = \frac{1}{2}$. Verifiquémoslo:



En lugar de tomar una partición cualquiera de $[0,1]$, para cada $n \in N$ tomamos la siguiente partición:

$$\pi_n = [0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1]$$

es decir, $t_i = \frac{i}{n}$ para $0 \leqslant i \leqslant n$. Entonces, como es $f(x) = x$, el conjunto $[f(x): x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]]$ no es otra cosa que $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$.

Su ínfimo es $\frac{i-1}{n}$ y su supremo es $\frac{i}{n}$. Luego:

$$s_{\pi_n} = \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) =$$

$$= \frac{1}{n^2} (0 + 1 + 2 + \dots + (n-1)) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)\, n}{2} = \frac{n-1}{2n} \qquad (1)$$

y además:

$$S_{\pi_n} = \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i =$$

$$= \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{n} =$$

$$= \frac{n+1}{2n} \qquad (2)$$

Como $s_{\pi_n} \leqslant \underline{\int_0^1} x\,dx \leqslant \overline{\int_0^1} x\,dx \leqslant S_{\pi_n}$, resulta, por (1) y (2):

$$\frac{n-1}{2n} \leqslant \underline{\int_0^1} x\,dx \leqslant \overline{\int_0^1} x\,dx \leqslant \frac{n+1}{2n}$$

para todo $n \in N$. Tomando límite cuando $n \to \infty$:

$$\frac{1}{2} \leqslant \underline{\int_0^1} x\,dx \leqslant \overline{\int_0^1} x\,dx \leqslant \frac{1}{2}$$

de donde se deduce: $\underline{\int_0^1} x\,dx = \overline{\int_0^1} x\,dx = \frac{1}{2}$. Luego la función considerada es integrable y además:

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

Para concluir este parágrafo, damos un criterio de integrabilidad, muy sencillo, pero que resultará de gran utilidad:

PROPOSICION 8.8.
(CRITERIO DE INTEGRABILIDAD)

Sea $f: [a, b] \to R$ una función acotada. Entonces f es integrable sobre $[a, b]$ sí y sólo si vale la siguiente condición:

"Para todo $\epsilon > 0$ existe una partición π de $[a, b]$ tal que $S_\pi(f) - s_\pi(f) < \epsilon$".

Demostración

Supongamos primero que f es integrable sobre $[a, b]$, es decir:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \qquad (3)$$

y sea $\epsilon > 0$ arbitrario.

Como $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup [s_\pi(f): \pi$ partición de $[a, b]]$, entonces, por Proposición 1.22., existe π_1 partición de $[a, b]$ tal que:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\epsilon}{2} < s_{\pi_1}(f) \qquad (4)$$

Como $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf [S_\pi(f): \pi$ partición de $[a,b]]$, entonces, por Ejercicio 4 de parágrafo 1.8., existe π_2 tal que:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2} > S_{\pi_2}(f) \qquad (5)$$

Si $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, entonces π es más fina que π_1 y que π_2. De la Proposición 8.4. y de (4) y (5) deducimos rápidamente:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\epsilon}{2} < s_\pi(f)$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2} > S_\pi(f)$$

y por lo tanto:

$$S_\pi(f) - s_\pi(f) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2} -$$

$$-\left(\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\epsilon}{2}\right) = \overline{\int} f(x)\,dx -$$

$$- \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = 0 + \epsilon = \epsilon$$

que es lo que queríamos demostrar.

Recíprocamente, supongamos ahora que para todo $\epsilon > 0$ existe una partición π de $[a, b]$ para la cual es $S_\pi(f) - s_\pi(f) < \epsilon$. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$ es:

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqslant \quad \text{(por definición de ínfimo y supremo)}$$

$$\leqslant S_\pi(f) - s_\pi(f) < \epsilon$$

o sea:

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \epsilon$$

Como esto vale para todo $\epsilon > 0$, por Ejercicio 2.b. de parágrafo 1.9.:

$$0 = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

que es lo que queríamos demostrar. ///

EJERCICIOS

1.

Si A y B son dos conjuntos no vacíos de números reales (es decir, $A \subset R$ y $B \subset R$) y es $a \leqslant b$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$, probar entonces que $\sup A \leqslant \inf B$ (de ésto y de 8.4. sale que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \text{).}$$

2.

Si $f: [a, b] \to R$ es acotada (con $a < b$), probar que $[s_\pi(f): \pi$ partición de $[a, b]]$ y $[S_\pi(f): \pi$ partición de $[a, b]]$ son no vacíos.

3.

Sea $f: [a, b] \to R$ *acotada y supongamos tener definida, para cada* $n \in N$, *una partición* π_n *de* $[a, b]$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} s_{\pi_n}(f) = \lim_{n\to\infty} S_{\pi_n}(f)$. *Probar que* f *es integrable sobre* $[a, b]$.

4.

★ a) Probar que $f(x) = x$ es integrable sobre cualquier $[a, b]$ y que:

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

(SUGERENCIA: si $h = b - a$, tomar $\pi_n = [a, a + \frac{h}{n}, a + 2\frac{h}{n}, \ldots, a + (n-1) \cdot \frac{h}{n}, b]$ y usar ejercicio anterior).

★ b) Probar que $f(x) = x^2$ es integrable sobre $[0, 1]$ y que:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

(SUGERENCIA: imitar el Ejemplo 3 y recordar que $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

5.

Probar que si $f: [a, b] \to R$ es acotada y $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ y $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ son mayores o iguales que cero (luego, si f es, además, integrable, será $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$).

6.

Sea $f: [0, 1] \to R$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

Probar que f es integrable sobre $[0, 1]$ y que $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.

(SUGERENCIA: tomar $\pi_n = [0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1]$ y aplicar Ejercicio 3).

8.2.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL

En este parágrafo vamos a estudiar algunas de las propiedades que tiene el concepto definido en el parágrafo anterior, la integral definida.

PROPOSICION 8.9.

Sean $a, b, c \in R$ tales que $a < c < b$. Entonces una función acotada $f: [a, b] \to R$ es integrable sobre $[a, b]$ si y sólo si es integrable sobre $[a, c]$ y también sobre $[c, b]$. Si ese es el caso, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (6)$$

Demostración

Supongamos primero que f es integrable sobre $[a, b]$. Entonces, por el criterio de integrabilidad (Proposición 8.8.), dado $\epsilon > 0$ existe una partición $\pi = [t_0, t_1, \ldots, t_n]$ de $[a, b]$ tal que:

$$S_\pi(f) - s_\pi(f) < \epsilon$$

Supongamos primero que $c \in \pi$, es decir, que existe j, $1 \leqslant j \leqslant n$, tal que $c = t_j$.

Consideremos entonces:

$$\pi_1 = [t_0, t_1, \ldots, t_j], \quad \pi_2 = [t_j, t_{j+1}, \ldots, t_n]$$

Entonces π_1 es una partición de $[a, c]$ y π_2 es una partición de $[c, b]$.

Por otra parte:

$$s_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{j} m_i(t_i - t_{i-1}) +$$

$$+ \sum_{i=j+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = s_{\pi_1}(f) + s_{\pi_2}(f) \qquad (7)$$

Análogamente resulta:

$$S_\pi(f) = S_{\pi_1}(f) + S_{\pi_2}(f) \qquad (8)$$

Por lo tanto:

$$S_\pi(f) - s_\pi(f) = S_{\pi_1}(f) + S_{\pi_2}(f) - (s_{\pi_1}(f) + s_{\pi_2}(f)) =$$

$$= (S_{\pi_1}(f) - s_{\pi_1}(f)) + (S_{\pi_2}(f) - s_{\pi_2}(f))$$

Como los sumandos entre paréntesis son $\geqslant 0$ (pues una suma superior siempre es mayor o igual que una suma inferior), y como su suma es menor que ϵ, entonces seguramente los dos sumandos son menores que ϵ:

$$S_{\pi_1}(f) - s_{\pi_1}(f) < \epsilon \qquad (9)$$

$$S_{\pi_2}(f) - s_{\pi_2}(f) < \epsilon \qquad (10)$$

Lo anterior valía en el caso en que fuese $c \in \pi$. Si no es así, seguramente existirá i, $1 \leqslant i \leqslant n$, tal que $t_{i-1} < c < t_i$. Consideramos entonces la partición $\pi' = \pi \cup [c]$, es decir, $\pi' = [t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, c, t_i, \ldots, t_n]$.

Como π' es más fina que π, entonces $S_{\pi'}(f) \leq S_\pi(f)$ y $s_\pi(f) \leq s_{\pi'}(f)$.

Luego, por (6):

$$S_{\pi'}(f) - s_{\pi'}(f) \leq S_\pi(f) - s_\pi(f) < \epsilon$$

y repetimos la demostración anterior hasta llegar a (7) y (8) (con π' en lugar de π) y luego a (9) y (10).

En definitiva, para cada $\epsilon > 0$ hemos conseguido una partición π_1 de $[a, c]$ tal que valga (9) y una partición π_2 de $[c, b]$ tal que valga (10). En consecuencia, por el criterio de integrabilidad 8.8., f es integrable sobre $[a, c]$ y f es integrable sobre $[c, b]$.

Esto prueba una implicación, pero todavía podemos decir algo más. Por (7)(1):

$$s_\pi(f) \leq s_{\pi'}(f) = s_{\pi_1}(f) + s_{\pi_2}(f) \leq$$

$$\leq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Luego, el último miembro es cota superior de $[s_\pi(f)$: π partición de $[a, b]]$, y entonces:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \geq$$

$$\geq \sup\,[s_\pi(f)\text{: partición de } [a, b]] =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \qquad (11)$$

(1) Es $\pi' = \pi \cup [c]$; desde luego, si $c \in \pi$, entonces $\pi' = \pi$.

(en realidad, ese supremo es $\int_a^b f(x)\,dx$, pero como f es integrable en $[a, b]$, eso es igual a $\int_a^b f(x)\,dx$).

Análogamente es, por (8):

$$S_\pi(f) \geq S_{\pi'}(f) = S_{\pi_1}(f) + S_{\pi_2}(f) \geq$$

$$\geq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Luego, el último miembro es cota inferior de $[S_\pi(f)$: π partición de $[a, b]]$, con lo cual:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \leq$$

$$\leq \inf\,[S_\pi(f)\text{: } \pi \text{ partición de } [a, b]] =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \qquad (12)$$

De (11) y (12) obtenemos:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Probamos ahora la recíproca, es decir, suponiendo f integrable sobre $[a, c]$ y sobre $[c, b]$, queremos probar que f es integrable sobre $[a, b]$. Para ello, sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Como f es integrable sobre $[a, c]$, existe π_1 partición de $[a, c]$ tal que:

$$S_{\pi_1}(f) - s_{\pi_1}(f) < \frac{\epsilon}{2}$$

y, como f es integrable sobre $[c, b]$, existe π_2 partición de $[c, b]$ tal que:

$$S_{\pi_2}(f) - s_{\pi_2}(f) < \frac{\epsilon}{2}$$

Si $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, entonces π es partición de $[a, b]$ y, como antes:

$$S_\pi(f) - s_\pi(f) = (S_{\pi_1}(f) + S_{\pi_2}(f)) - (s_{\pi_1}(f) + s_{\pi_2}(f)) =$$

$$= (S_{\pi_1}(f) - s_{\pi_1}(f)) + (S_{\pi_2}(f) - s_{\pi_2}(f)) <$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Siendo $\epsilon > 0$ cualquiera, resulta, por Criterio de integrabilidad 8.8., que f es integrable sobre $[a, b]$. ///

Hasta ahora hemos definido, cuando existe, la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ en el caso $a < b$. Queremos ahora extender la definición dada al caso general (en el que puede ser $a > b$, $a = b$ o $a < b$).

Lo que nos va a guiar es la idea de que siga valiendo (6); si es así, observemos que, en particular debe ser:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

de donde deducimos que debe ser: $\int_b^b f(x)\,dx = 0$.

Supongamos ahora $b < a$; por (6), debería ser:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_b^b f(x)\,dx = 0$$

de donde:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

De esta forma, la idea de que siga valiendo (6) en el caso general nos lleva derecho a la siguiente definición:

DEFINICION 8.10.

Si $a \in R$ y f es una función con a perteneciente a su dominio, definimos:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Si $a < b$ y f es integrable sobre $[a, b]$, definimos:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Ahora hay que hacer al revés, *partiendo* de 8.10.

hay que *demostrar* que vale (6) en el caso general, lo que se deja como ejercicio para el lector.

Sigamos estudiando propiedades de la integral. Al igual que en el Capítulo anterior, nos interesa saber cómo se comporta la integral respecto a las operaciones entre funciones (suma, producto, etc.). Comenzamos con la suma.

PROPOSICION 8.11.

Si f y g son funciones integrables sobre $[a, b]$, entonces $f + g$ es integrable sobre $[a, b]$ y además:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

Demostración

Observemos primero que, al ser f y g integrables, por definición son acotadas. Luego $f + g$ es acotada. En efecto, si $|f(x)| \leqslant M_1$ para todo $x \in [a, b]$ y $|g(x)| \leqslant M_2$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant M_1 + M_2$$

para todo $x \in [a, b]$.

Sea ahora $\epsilon > 0$ arbitrario. Al ser f y g integrables sobre $[a, b]$, existen particiones π_1 y π_2 de $[a, b]$ tales que:

$$S_{\pi_1}(f) - s_{\pi_1}(f) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$S_{\pi_2}(g) - s_{\pi_2}(g) < \frac{\epsilon}{2}$$

Si $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, entonces es, por Proposición 8.4.:

$$S_\pi(f) - s_\pi(f) \leqslant S_{\pi_1}(f) - s_{\pi_1}(f) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$S_\pi(g) - s_\pi(g) \leqslant S_{\pi_2}(g) - s_{\pi_2}(g) < \frac{\epsilon}{2}$$

La partición π será de la forma $\pi = [t_0, t_1, \dots, t_n]$. Llamemos:

$$m_i = \inf [f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]]$$

$$m_i' = \inf [g(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]]$$

$$m_i'' = \inf [f(x) + g(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]]$$

y análogamente para M_i, M_i' y M_i''. Entonces es:

$$m_i'' \geqslant m_i + m_i' \qquad (13)$$

$$M_i'' \leqslant M_i + M_i' \qquad (14)$$

En efecto, para $x \in [t_{i-1}, t_i]$ es $m_i \leqslant f(x)$ y $m_i' \leqslant g(x)$, luego $m_i + m_i' \leqslant f(x) + g(x)$. Luego $m_i + m_i'$ es cota inferior de $[f(x) + g(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]]$, y por lo tanto $m_i + m_i'$ es menor o igual que su ínfimo (que es la *mayor* cota inferior). Pero eso es decir que $m_i + m_i' \leqslant m_i''$.

Análogamente resulta $M_i + M_i'$ cota superior del mismo conjunto; luego es mayor o igual que su supremo (que es la *menor* cota superior), es decir, $M_i + M_i' \geqslant M_i''$.

Ahora la primera parte de la Proposición sale fácilmente:

$$S_\pi(f+g) - s_\pi(f+g) = \sum_{i=1}^n M_i''(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i''(t_i - t_{i-1}) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^n (M_i + M_i')(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^n (m_i + m_i')(t_i - t_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) +$$
$$+ \sum_{i=1}^n M_i'(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i'(t_i - t_{i-1}) =$$
$$= S_\pi(f) - s_\pi(f) + S_\pi(g) - s_\pi(g) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Como dado $\epsilon > 0$ hemos conseguido una partición π de $[a, b]$ tal que $S_\pi(f+g) - s_\pi(f+g) < \epsilon$, entonces $f+g$ es integrable sobre $[a, b]$ por 8.8.

Para la segunda parte, observemos que, de (13) y (14), resulta $S_\pi(f+g) \leqslant S_\pi(f) + S_\pi(g)$ y $s_\pi(f+g) \geqslant s_\pi(f) + s_\pi(g)$. Luego:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant S_\pi(f+g) - s_\pi(f) - s_\pi(g) \leqslant$$
$$\leqslant S_\pi(f) + S_\pi(g) - s_\pi(f) - s_\pi(g) =$$
$$= S_\pi(f) - s_\pi(f) + S_\pi(g) - s_\pi(g) <$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

y también:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geqslant$$
$$\geqslant s_\pi(f+g) - S_\pi(f) - S_\pi(g) \geqslant s_\pi(f) + s_\pi(g) - S_\pi(f) - S_\pi(g) =$$
$$= -(S_\pi(f) - s_\pi(f) + S_\pi(g) - s_\pi(g)) > -\left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}\right) = -\epsilon .$$

De las dos desigualdades, obtenemos:

$$\left| \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \right| < \epsilon$$

y como esto se puede hacer para todo $\epsilon > 0$, resulta que lo que está dentro del módulo debe ser cero, es decir:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

con lo que queda probada la Proposición. ///

Si f es una función a valores en $\mathbb{R}$, se designa por $-f$ a la función $x \to -f(x)$.

La integrabilidad de $-f$ se deduce de la integrabilidad de f:

PROPOSICION 8.12.

Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable sobre $[a, b]$, entonces $-f$ es integrable sobre $[a, b]$ y además:

$$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración

Como f es integrable sobre $[a, b]$, entonces f es acotada en $[a, b]$ (sólo hemos definido integrabilidad de funciones acotadas), es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in [a, b]$. Pero entonces:

$$|(-f)(x)| = |-f(x)| = |f(x)| \leqslant M$$

para todo $x \in [a, b]$. Luego $-f$ es acotada en $[a, b]$.

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario; como f es integrable sobre $[a, b]$, existe una partición $\pi = [t_0, t_1, \ldots, t_n]$ de $[a, b]$ tal que $S_\pi(f) - s_\pi(f) < \epsilon$. Llamemos:

$$m_i = \inf [f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]] \quad , \quad M_i = \sup [f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]]$$

$$m'_i = \inf [-f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]] \quad , \quad M'_i = \sup [-f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]]$$

Afirmamos que es:

$$m'_i = -M_i \quad , \quad M'_i = -m_i \qquad (15)$$

En efecto, si $x \in [t_{i-1}, t_i]$, es $f(x) \geqslant m_i$. Luego $-f(x) \leqslant -m_i$, con lo cual $-m_i$ es cota superior de $[-f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]]$. Si c es otra cota superior de ese conjunto, entonces $-f(x) \leqslant c$ para $x \in [t_{i-1}, t_i]$, luego $f(x) \geqslant -c$ para $x \in [t_{i-1}, t_i]$. Siendo el ínfimo la mayor cota inferior, se sigue que $m_i \geqslant -c$, o sea $c \geqslant -m_i$. En conclusión, $-m_i$ es el supremo de $[-f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]]$, es decir, $-m_i = M'_i$. La otra igualdad se prueba en forma análoga. (Hacerlo).

La relación (15) tiene las dos siguientes consecuencias:

$$S_\pi(-f) = -s_\pi(f) \qquad (16)$$

$$s_\pi(-f) = -S_\pi(f) \qquad (17)$$

Con esto ya es fácil probar la Proposición. En primer lugar:

$$S_\pi(-f) - s_\pi(-f) = -s_\pi(f) - (-S_\pi(f)) =$$

$$= S_\pi(f) - s_\pi(f) < \epsilon$$

con lo cual, siendo $\epsilon > 0$ arbitrario, resulta $-f$ integrable sobre $[a, b]$.

En segundo lugar, por (16) y (17) es:

$$\int_a^b (-f(x))\,dx + \int_a^b f(x)\,dx \leqslant S_\pi(-f) + S_\pi(f) =$$

$$= -s_\pi(f) + S_\pi(f) = S_\pi(f) - s_\pi(f) < \epsilon$$

y también:

$$\int_a^b (-f(x))\,dx + \int_a^b f(x)\,dx \geqslant s_\pi(-f) + s_\pi(f) =$$

$$= -S_\pi(f) + s_\pi(f) = -(S_\pi(f) - s_\pi(f)) > -\epsilon$$

con lo cual:

$$\left| \int_a^b (-f(x))\,dx + \int_a^b f(x)\,dx \right| < \epsilon$$

Valiendo esto para todo $\epsilon > 0$, lo que está dentro del módulo debe ser cero, lo cual implica inmediatamente:

$$\int_a^b (-f(x))\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

que es lo que queríamos demostrar. ///

La Proposición 8.12. quedará incluida en la siguiente Proposición (para cuya demostración será un resultado auxiliar).

PROPOSICION 8.13.

Si f es integrable sobre $[a, b]$ y c es un número real arbitrario, entonces $c.f$ es integrable sobre $[a, b]$ y además:

$$\int_a^b c.f(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx$$

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración

Observemos que $|f(x)| \leqslant M$ implica $|c.f(x)| \leqslant |c|\,M$. Luego $c.f$ está acotada al estarlo f.

Supongamos primero que es $c > 0$. Dado $\epsilon > 0$, sea $\pi = [t_0, t_1, \ldots, t_n]$ una partición de $[a, b]$ tal que:

$$S_\pi(f) - s_\pi(f) < \frac{\epsilon}{c}$$

(existe por ser f integrable sobre $[a, b]$ y por ser $\epsilon/c > 0$).

Sean:

$$m_i = \inf [f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]] \quad , \quad M_i = \sup [f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]]$$

$$m'_i = \inf [c.f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]] \quad , \quad M'_i = \sup [c.f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]]$$

Afirmamos que es:

$$m'_i = c.m_i \quad , \quad M'_i = c.M_i \qquad (18)$$

En efecto, si $x \in [t_{i-1}, t_i]$, entonces es $f(x) \geqslant m_i$, luego $c.f(x) \geqslant c.m_i$ (recordar que estamos suponiendo $c > 0$), con lo cual $c.m_i$ es cota inferior de $[c.f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]]$. Como queremos ver que es igual al ínfimo de ese conjunto (o sea, a m_i'), consideremos d una cota inferior cualquiera del conjunto dado. Entonces es $c.f(x) \geqslant d$ para $x \in [t_{i-1}, t_i]$, de donde $f(x) \geqslant \frac{d}{c}$ para $x \in [t_{i-1}, t_i]$.

Con esto, d/c resulta cota inferior de $[f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]]$. Como m_i es el ínfimo de este último conjunto, entonces es $\frac{d}{c} \leqslant m_i$, luego $d \leqslant c.m_i$. Esto implica que $c.m_i$ es el ínfimo de $[c.f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]]$, o sea, $c.m_i = m_i'$. La igualdad $c.M_i = M_i'$ se prueba en forma similar (Hacerlo).

Las igualdades (18) tienen las siguientes consecuencias inmediatas:

$$S_\pi(c.f) = c.S_\pi(f) \qquad (19)$$
$$s_\pi(c.f) = c.s_\pi(f)$$

Con esto resulta fácilmente la Proposición (para $c > 0$). Por un lado es:

$$S_\pi(c.f) - s_\pi(c.f) = c.S_\pi(f) - c.s_\pi(f) = c.(S_\pi(f) - s_\pi(f)) < c.\frac{\epsilon}{c} = \epsilon$$

lo cual, siendo $\epsilon > 0$ arbitrario, prueba la integrabilidad de $c.f$. Por otra parte es:

$$\int_a^b c.f(x)\,dx - c.\int_a^b f(x)\,dx \leqslant S_\pi(c.f) - c.s_\pi(f) = c.S_\pi(f) - c.s_\pi(f) < \epsilon$$

y también

$$\int_a^b c.f(x)\,dx - c.\int_a^b f(x)\,dx \geqslant s_\pi(c.f) - c.S_\pi(f) = c.s_\pi(f) - c.S_\pi(f) = -c.(S_\pi(f) - s_\pi(f)) > -c.\frac{\epsilon}{c} = -\epsilon$$

Estas dos desigualdades se resumen en la desigualdad:

$$\left| \int_a^b c.f(x)\,dx - c\int_a^b f(x)\,dx \right| < \epsilon$$

Como esto vale para todo $\epsilon > 0$, lo que está dentro del módulo debe ser cero.

De ahí sacamos:

$$\int_a^b c.f(x)\,dx = c.\int_a^b f(x)\,dx.$$

Todo esto valía para $c > 0$. Si $c = 0$, la Proposición es trivial, y si $c < 0$, como $c.f = (-c).(-f)$, resulta $c.f$ integrable sobre $[a, b]$ (pues $-f$ es integrable sobre $[a, b]$ por 8.12. y $-c$ es mayor que cero), y además, por lo recién probado:

$$\int_a^b c.f(x)\,dx = \int_a^b (-c).(-f(x))\,dx =$$
$$= (-c).\int_a^b (-f(x))\,dx = \quad \text{(por 8.12.)}$$
$$= (-c).\left(-\int_a^b f(x)\,dx\right) =$$
$$= c.\int_a^b f(x)\,dx$$

que es lo que queríamos demostrar.///

La función $|f|$ denota, desde luego, la función $x \to |f(x)|$ (o sea, es $|f|(x) = |f(x)|$). De la integrabilidad de f se deduce la de $|f|$.

PROPOSICION 8.14.

Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces $|f|$ es integrable sobre $[a, b]$.

Demostración

Al ser f integrable es acotada; luego $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in [a, b]$, lo cual implica inmediatamente que $|f|$ es acotada (con la misma cota M).

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario; como f es integrable sobre $[a, b]$, existe una partición $\pi = [t_0, t_1, \ldots, t_n]$ de $[a, b]$ tal que $S_\pi(f) - s_\pi(f) < \epsilon$.

Llamemos:

$$m_i = \inf\,[f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]] \quad , \quad M_i = \sup\,[f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]]$$
$$m_i' = \inf\,[|f(x)|: x \in [t_{i-1}, t_i]] \quad , \quad M_i' = \sup\,[|f(x)|: x \in [t_{i-1}, t_i]]$$

Afirmamos que es:

$$M_i' - m_i' \leqslant M_i - m_i \qquad (19)$$

Para probarlo, hacemos lo siguiente: si x e y son dos puntos cualesquiera de $[t_{i-1}, t_i]$, entonces es:

$$f(x) - f(y) \leqslant M_i - f(y) \leqslant M_i - m_i$$
$$f(x) - f(y) \geqslant m_i - f(y) \geqslant m_i - M_i = -(M_i - m_i)$$

lo cual se puede expresar en la desigualdad:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M_i - m_i$$

Ahora bien, por Ejercicio 4 de 1.12.:

$$|f(x)| - |f(y)| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant M_i - m_i$$

de donde obtenemos:

$$|f(x)| \leqslant M_i - m_i + |f(y)| \qquad (20)$$

desigualdad válida *cualesquiera sean* x, y *en* $[t_{i-1}, t_i]$.

Para y (fijo) de $[t_{i-1}, t_i]$, la desigualdad (20) nos dice que $M_i - m_i + f(y)$ es cota superior de $[|f(x)|: x \in [t_{i-1}, t_i]]$. Luego es mayor o igual que su supremo:

$$M_i' \leqslant M_i - m_i + |f(y)|$$

de donde:

$$M_i' - (M_i - m_i) \leqslant |f(y)| \qquad (21)$$

La desigualdad (21), *válida para todo* $y \in [t_{i-1}, t_i]$, nos dice que $M_i' - (M_i - m_i)$ es cota inferior de $[f(y): y \in [t_{i-1}, t_i]]$. Luego es menor o igual que su ínfimo:

$$M_i' - (M_i - m_i) \leqslant m_i'$$

de donde resulta:

$$M'_i - m'_i \leq M_i - m_i$$

Una vez probado (19), el resto es fácil:

$$S_\pi(|f|) - s_\pi(|f|) = \sum_{i=1}^{n} M'_i(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m'_i(t_i - t_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \quad \text{(por (19))}$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) =$$
$$= S_\pi(f) - s_\pi(f) < \epsilon$$

Como para cada $\epsilon > 0$ resulta haber una partición π con $S_\pi(f) - s_\pi(f) < \epsilon$ entonces $|f|$ es integrable sobre $[a, b]$. ///

Probamos ahora un resultado auxiliar que quedará después incluido, como caso particular, en la Proposición 8.16. Desde luego, f^2 designa la función $f.f$ (o sea, $(f^2)(x) = f(x)^2$).

PROPOSICION 8.15.

Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces f^2 es integrable sobre $[a, b]$.

Demostración

Es f^2 acotada por serlo f: si $|f(x)| \leq M$, entonces $|f(x)^2| = |f(x)|^2 \leq M^2$.

Supongamos primero que es $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, y sea $\epsilon > 0$.

Sea π una partición de $[a, b]$, $\pi = [t_0, t_1, \dots, t_n]$ tal que:

$$S_\pi(f) - s_\pi(f) < \frac{\epsilon}{2M}$$

Sean $m_i = \inf [f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]]$, $M_i = \sup [f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]]$, $m'_i = \inf [f(x)^2: x \in [t_{i-1}, t_i]]$, $M'_i = \sup [f(x)^2: x \in [t_{i-1}, t_i]]$. Afirmamos que es:

$$m'_i = m_i^2 \quad , \quad M'_i = M_i^2 \qquad (22)$$

Para probarlo, observemos que es $f(x) \geq m_i$ para $x \in [t_{i-1}, t_i]$, luego $f(x)^2 \geq m_i^2$ para todo $x \in [t_{i-1}, t_i]$ (recordar que es $f(x) \geq 0$ para todo x, luego $m_i \geq 0$).

Entonces m_i^2 es cota inferior de $[f(x)^2: x \in [t_{i-1}, t_i]]$. Si $d \geq 0$ es otra cota inferior, entonces $d \leq f(x)^2$ para todo $x \in [t_{i-1}, t_i]$, luego $\sqrt{d} \leq f(x)$ para todo $x \in [t_{i-1}, t_i]$, con lo cual $\sqrt{d}$ es cota inferior de $[f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]]$, y entonces $\sqrt{d} \leq m_i$ (porque m_i es la mayor cota inferior). Luego $d \leq m_i^2$, lo cual prueba que m_i^2 es el ínfimo de $[f(x)^2: x \in [t_{i-1}, t_i]]$, es decir, $m_i^2 = m'_i$.

La otra igualdad se prueba en forma similar.

Antes de explotar las igualdades (22), observemos que, siendo $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, es $-M \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, en particular, para todo $x \in [t_{i-1}, t_i]$. Luego $-M \leq m_i \leq M_i \leq M$, con lo cual

$$M_i + m_i \leq M + M = 2M$$

Ahora es fácil probar la Proposición (siempre para $f \geq 0$):

$$S_\pi(f^2) - s_\pi(f^2) = \sum_{i=1}^{n} M'_i(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m'_i(t_i - t_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (M'_i - m'_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i^2 - m_i^2)(t_i - t_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i + m_i)(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} 2M(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) =$$
$$= 2M\left[\sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})\right] =$$
$$= 2M(S_\pi(f) - s_\pi(f)) < 2M \cdot \frac{\epsilon}{2M} = \epsilon$$

Siendo $\epsilon > 0$ arbitrario, resulta f^2 integrable sobre $[a, b]$ por 8.8.

Todo lo anterior valía para el caso en que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. En el caso general, hacemos el siguiente razonamiento: si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces, por 8.14., $|f|$ es integrable sobre $[a, b]$. Pero como $|f| \geq 0$, entonces, por lo que vimos recién, $|f|^2$ es integrable sobre $[a, b]$. Pero claramente $|f|^2 = f^2$, así que f^2 es integrable sobre $[a, b]$. ///

Ahora estudiamos la integrabilidad del producto de funciones:

PROPOSICION 8.16.

Si f y g son integrables sobre $[a, b]$, entonces f.g es integrable sobre $[a, b]$.

Demostración

Como

$(f+g)^2(x) = (f(x)+g(x))^2 = f(x)^2 + 2f(x)\,g(x) + g(x)^2$

y

$(f-g)^2(x) = (f(x)-g(x))^2 = f(x)^2 - 2f(x)\,g(x) + g(x)^2$

entonces es

$$(f+g)^2(x) - (f-g)^2(x) = 4f(x)\,g(x)$$

lo que podemos escribir:

$$f.g = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$$

Ahora bien, $f+g$ y $f-g$ son integrables por 8.11. y 8.12.

Luego, por 8.15., $(f+g)^2$ y $(f-g)^2$ son integrables. Entonces $(f+g)^2-(f-g)^2$ es integrable (por 8.11. y 8.12.), con lo cual $\frac{1}{4}\left((f+g)^2-(f-g)^2\right)$ es integrable (por 8.13.), es decir, $f.g$ es integrable. ///

EJERCICIOS

1.

Probar que si f es integrable sobre $[a,b]$ y c, d son tales que $a \leq c < d \leq b$, entonces f es integrable sobre $[c,d]$.

2.

Probar que si f y g son integrables sobre $[a,b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(SUGERENCIA: considerar $f-g$ y usar Ejercicio 5 del parágrafo 8.1.).

3.

Probar que si f es integrable sobre $[a,b]$ y es $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, entonces es:

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a)$$

(SUGERENCIA: Usar Ejercicio 1 del parágrafo 8.1. y el ejercicio anterior).

4.

Probar que si f es integrable sobre $[a,b]$, entonces f^n es integrable sobre $[a,b]$ cualquiera sea $n \in N$. Usar este hecho para probar que toda función polinómica es integrable sobre cualquier intervalo cerrado $[a,b]$.

5.

Probar que si f es integrable sobre $[a,b]$, entonces:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(SUGERENCIA: usar el Ejercicio 2).

6.

Probar que si f y g son integrables sobre $[a,b]$, entonces:

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2dx\right).\left(\int_a^b g(x)^2dx\right)$$

(desigualdad de Schwarz).

(SUGERENCIA: partir de

$$0 \leq \left(\int_a^b f(x)\,dx - \lambda\int_a^b g(x)\,dx\right)^2$$

cualquiera sea $\lambda \in R$ y usar Ejercicio 2.c. del parágrafo 2.3.).

7.

Dar un ejemplo de funciones integrables f y g sobre $[a,b]$ para las cuales no sea $\int_a^b f(x).g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.\int_a^b g(x)\,dx.$

8.

Probar que si f es integrable sobre $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\sqrt{f}$ (o sea, la función $x \to \sqrt{f(x)}$) es integrable sobre $[a,b]$.

(SUGERENCIA: imitar 8.15. En algún momento habrá que multiplicar por el "conjugado").

8.3.

INTEGRABILIDAD DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Hasta ahora todo lo que tenemos es una serie de implicaciones: si f es integrable, entonces $-f$ es integrable, si además g es integrable, entonces $f+g$ es integrable, etc. Pero como ejemplo concreto de funciones integrables sólo tenemos las funciones polinómicas (Ejercicio 4 de 8.4.).

Vamos a ampliar la familia de funciones integrables conocidas. Comenzamos probando el siguiente, e importante, resultado:

TEOREMA 8.17.

Si $f: [a,b] \to R$ es continua, entonces f es integrable sobre $[a,b]$.

Demostración

Al ser f continua en $[a,b]$, f es acotada en $[a,b]$ por Teorema 6.25. y f es uniformemente continua en $[a,b]$ por el Teorema de Heine-Cantor (Teorema 6.31.). Luego, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que vale la siguiente implicación:

$$|x-x'| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x')| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

Sea $n \in N$ tal que $\frac{b-a}{n} < \delta$ y consideremos la siguiente partición:

$$\pi = [a,\ a+\frac{b-a}{n},\ a+2.\frac{b-a}{n},\ a+3.\frac{b-a}{n},\ \ldots,\ a+(n-1).\frac{b-a}{n},\ b]$$

es decir $t_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$ (con lo cual $t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n} < \delta$).

Como f es, en particular, continua en cada $[t_{i-1}, t_i]$, entonces por Teorema 6.26. existen $c_i, d_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tales que:

$$m_i = f(c_i)$$

$$M_i = f(d_i)$$

(m_i y M_i son, como siempre, el ínfimo y el supremo de $[f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]]$; al ser la función continua, resultan ser el mínimo y el máximo de ese conjunto), y siendo $c_i, d_i \in [t_{i-1}, t_i]$, es $|c_i - d_i| < t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n} < \delta$, con lo cual $|f(d_i) - f(c_i)| < \frac{\epsilon}{b-a}$, o sea, siendo $f(d_i) \geq f(c_i)$:

$$f(d_i) - f(c_i) < \frac{\epsilon}{b-a}$$

Entonces resulta:

$$S_\pi(f) - s_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(d_i) - f(c_i))(t_i - t_{i-1}) <$$
$$< \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a} . (t_i - t_{i-1}) = \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \frac{\epsilon}{b-a} . (b-a) = \epsilon$$

y como esta partición se puede conseguir para todo $\epsilon > 0$, resulta f integrable sobre $[a, b]$ por la Proposición.8.8. ///

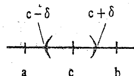
Podemos agregar más funciones a la categoría de las integrables:

TEOREMA 8.18.

Si f: $[a, b] \rightarrow R$ es acotada y además es continua excepto en un número finito de puntos, entonces f es integrable sobre $[a, b]$.

Demostración

Supongamos primero que f es continua en $[a, b]$ excepto en un cierto $c \in (a, b)$. Como, por otra parte, suponemos f acotada, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$.



Sea $\epsilon > 0$ arbitrario y sea δ un número positivo tal que $\delta < \frac{\epsilon}{12M}$ y tal que $c - \delta$ y $c + \delta$ pertenezcan a (a, b). Llamemos $c_1 = c - \delta$, $c_2 = c + \delta$.

Como f es continua en $[a, c_1]$, existe $\pi_1 = [t_0, t_1, \ldots, t_n]$ partición de $[a, c_1]$ tal que $S_{\pi_1}(f) = s_{\pi_1}(f) < \frac{\epsilon}{3}$ (por Proposición 8.8. y Teorema 8.17.).

Análogamente, como f es continua en $[c_2, b]$, existe $\pi_2 = [s_0, s_1, \ldots, s_m]$ partición de $[c_2, b]$ tal que $S_{\pi_2}(f) - s_{\pi_2}(f) < \frac{\epsilon}{3}$. Sea π la siguiente partición de $[a, b]$:

$$\pi = [t_0, t_1, \ldots, t_n, s_0, s_1, \ldots, s_m]$$

(notar que $t_n = c_1$ y que $s_0 = c_2$).

Llamemos:

$$m_i = \inf [f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]] \quad , \quad M_i = \sup [f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]]$$

$$m'_i = \inf [f(x): x \in [s_{i-1}, s_i]] \quad , \quad M'_i = \sup [f(x): x \in [s_{i-1}, s_i]]$$

$$m_0 = \inf [f(x): x \in [t_n, s_0]] \quad , \quad M_0 = \sup [f(x): x \in [t_n, s_0]]$$

Siendo $-M \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, en particular para todo $x \in [t_n, s_0]$, resulta $m_0 \geq -M$ y $M_0 \leq M$, con lo cual:

$$M_0 - m_0 \leq M - (-M) = 2M$$

Ahora calculamos:

$$S_\pi(f) - s_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) + M_0(s_0 - t_n) + \sum_{i=1}^{m} M'_i(t_i - t_{i-1}) -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) - m_0(s_0 - t_n) - \sum_{i=1}^{m} m'_i(t_i - t_{i-1}) =$$
$$= S_{\pi_1}(f) - s_{\pi_1}(f) + (M_0 - m_0)(s_0 - t_n) + S_{\pi_2}(f) - s_{\pi_2}(f) <$$
$$< \frac{\epsilon}{3} + 2M(s_0 - t_n) + \frac{\epsilon}{3} = \frac{\epsilon}{3} + 2M . 2\delta + \frac{\epsilon}{3} <$$
$$< \frac{\epsilon}{3} + 2M . 2\frac{\epsilon}{12M} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Siendo $\epsilon > 0$ arbitrario, resulta f integrable sobre $[a, b]$.

En lo anterior supusimos que f era continua salvo en $c \in (a, b)$. Si $c = a$ ó $c = b$, la demostración es similar y se deja para el lector. Ahora la demostración para el caso general se hace por inducción sobre el número k de puntos en donde f no es continua. De la siguiente manera:

Si $k = 1$, es lo que ya probamos. Si suponemos que la Proposición es verdadera para un cierto $k \in N$, es decir, si suponemos que toda función continua en $[a, b]$, salvo en k puntos $c_1, \ldots, c_k$, es integrable, probemos que la Proposición es verdadera para $k + 1$.

Para ello, supongamos que f es continua en $[a, b]$ salvo en $c_1, c_2, \ldots, c_{k+1} \in [a,b]$ (con $c_1 < c_2 < \ldots < c_{k+1}$). Sea d un número real tal que

$$c_k < d < c_{k+1}$$



Entonces, en $[a, d]$, f es continua salvo en k pun- puntos (salvo en $c_1, c_2, \ldots, c_k$).

Por hipótesis inductiva, f es integrable sobre $[a, d]$. Por otra parte, en $[d, b]$, f es continua salvo en un punto (salvo en c_{k+1}), luego integrable sobre $[d, b]$, según hemos demostrado. Entonces f es integrable sobre $[a, d]$ y sobre $[d, b]$, con lo cual, por Proposición 8.9., concluímos que f es integrable sobre $[a, b]$.///

EJERCICIOS

1.

Si $f: [a, b] \to R$ es creciente (es decir, $x < y$ implica $f(x) \leq f(y)$), entonces f es integrable sobre $[a, b]$. (SUGERENCIA: para cada $n \in N$, tomar $\pi_n = [t_0, t_1, \ldots, t_n]$, con $t_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$, y usar Ejercicio 3 de parágrafo 8.1.). Análogamente, probar que si $f: [a, b] \to R$ es decreciente, entonces f es integrable sobre $[a, b]$.

2.

★ *a) Sea $f: [a, b] \to R$ continua. Probar que existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \qquad \textit{(Teorema del Valor Medio del Cálculo integral)}$$

★ *b) Dar un ejemplo de una función acotada en $[a, b]$ y continua en $[a, b]$ salvo en un punto, para la que no valga el Teorema del Valor Medio del Cálculo integral.*

3.

Sea $f: [a, b] \to R$ continua con $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Si existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) > 0$, probar que $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

4.

Sea $f: [a, b] \to R$ integrable sobre $[a, b]$ y con la siguiente propiedad: cualquiera sea g integrable sobre $[a, b]$, es $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$. Probar que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

5.

Sea $f: [a, b] \to R$ integrable. Para $c \in [a, b]$ definimos $g: [a, b] \to R$ como $g(x) = f(x)$ si $x \neq c$ y $g(c) =$ cualquier cosa. Probar que g es integrable sobre $[a, b]$ y que $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ (o sea, cambiar el valor de f en un punto no cambia su integrabilidad ni su integral).

8.4.

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO

En el presente capítulo, hasta ahora, hemos desarrollado la noción de integral definida en forma independiente del Capítulo 7, es decir, hasta ahora, no hay ninguna conexión entre la derivada y la integral. Esta conexión sí existe y es muy íntima. Como estos dos conceptos, el de derivada y el de integral, son los dos conceptos centrales del Cálculo, se entiende que el Teorema que indique la conexión entre ambos reciba el nombre de Fundamental.

Este Teorema proviene de considerar la siguiente situación: si $f: [a, b] \to R$ es integrable sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, x]$ para cada $x \in [a, b]$. (Ejercicio 1 del parágrafo 8.2.). Sea $F: [a, b] \to R$ la función definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

llamada *función integral* (no usamos la notación de siempre, con $f(x)\,dx$, porque se presta a confusión).

Este parágrafo está dedicado a estudiar las propiedades de esta función.

TEOREMA 8.19.

Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces la función $F: [a, b] \to R$ definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

es uniformemente continua en $[a, b]$.

Demostración

Como f es integrable sobre $[a, b]$, entonces f es acotada sobre $[a, b]$, es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$.

Pero entonces, por ejercicios 2 y 5 del parágrafo 8.2., si $y < x$:

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^y f(t)\,dt \right| = \qquad \text{(por 8.10.)}$$

$$= \left| \int_a^x f(t)\,dt + \int_y^a f(t)\,dt \right| = \qquad \text{(por 8.9.)}$$

$$= \left| \int_y^x f(t)\,dt \right| \leq \int_y^x |f(t)|\,dt \leq$$

$$\leq \int_y^x M\,dt = M(x-y) = M|x-y|$$

Luego dado $\epsilon > 0$ basta tomar $\delta = \frac{\epsilon}{M}$ para que valga la siguiente implicación:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow F(x) - F(y) < \epsilon$$

con lo cual F es uniformemente continua en $[a, b]$.///

TEOREMA 8.20.

(TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO)

Si f es integrable sobre $[a, b]$, si $F: [a, b] \rightarrow R$ es la función definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

y *si* f *es continua en un cierto* $x_0 \in [a, b]$, entonces:

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Demostración

Supongamos primero $x_0 \in (a, b)$. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario; como f es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que, para $|x - x_0| < \delta$, es $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Entonces, si $0 < h < \delta$:

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)\, dt - \int_a^{x_0} f(t)\, dt}{h} - f(x_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)\, dt + \int_{x_0}^{a} f(t)\, dt}{h} - f(x_0) \right| = \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt}{h} - f(x_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt}{h} - \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\, dt \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\, dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\, dt < \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \epsilon\, dt = \frac{1}{h} \cdot \epsilon \cdot (x_0 + h - x_0) = \epsilon$$

Análogamente, si $-\delta < h < 0$:

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\, dt \right| =$$

$$= \frac{1}{|h|} \left| - \int_{x_0+h}^{x_0} (f(t) - f(x_0))\, dt \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0+h}^{x_0} (f(t) - f(x_0))\, dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \int_{x_0+h}^{x_0} |f(t) - f(x_0)|\, dt < \frac{1}{|h|} \cdot \int_{x_0+h}^{x_0} \epsilon\, dt =$$

$$= \frac{1}{|h|}\, \epsilon\, (x_0 - (x_0 + h)) = \frac{1}{|h|} \cdot \epsilon\, (-h) = \frac{1}{|h|} \cdot \epsilon \cdot |h| = \epsilon$$

En resumen, lo que hemos probado es que, para $0 < |h| < \delta$:

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \epsilon \qquad (23)$$

Como para cada $\epsilon > 0$ se puede encontrar un $\delta > 0$ tal que, para $0 < |h| < \delta$, valga (23), entonces es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

o sea $F'(x_0) = f(x_0)$.

Esto prueba el Teorema si $x_0 \in (a, b)$. Si $x_0 = a$ ó $x_0 = b$, se entiende que $F'(x_0)$ designa una de las derivadas laterales ($F'_+(a)$ o $F'_-(b)$) y la demostración de la igualdad $F'(x_0) = f(x_0)$ se deja para el lector (es igual a lo que hicimos: para $x_0 = a$ no hace falta considerar el caso $-\delta < h < 0$, y para $x_0 = b$ no hace falta considerar el caso $0 < h < \delta$).///

COROLARIO 8.21.

(REGLA DE BARROW)

Si $f: [a, b] \rightarrow R$ *es continua y* g *es una función tal que* $g'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in [a, b]$, *entonces*

$$\int_a^b f(x)\, dx = g(b) - g(a)$$

Demostración

Sea $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Como f es continua en todo punto, entonces es $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$ por 8.20. Luego $F'(x) = g'(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Por el Corolario 7.12., existe $c \in R$ tal que

$$F(x) = g(x) + c \qquad \text{para todo } x \in [a, b]$$

En particular, $F(a) = g(a) + c$; como $F(a) = 0$, en-

tonces resulta $c = -g(a)$. Luego:

$$F(x) = g(x) - g(a) \qquad \text{para todo } x \in [a, b].$$

En particular:

$$F(b) = g(b) - g(a)$$

o sea:

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

que es lo que queríamos demostrar.///

Una función g tal que $g' = f$ se suele llamar una *primitiva* de f. Una función f puede no tener primitiva en general, pero si f es continua, entonces, por 8.20., $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es primitiva de f (cualquier otra primitiva difiere de f en una constante por el Corolario 7.12.).

Hay casos en que la determinación de una primitiva es inmediata. Por ejemplo, si $f(x) = x$, entonces claramente $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ es primitiva de f (pues $(\frac{1}{2}x^2)' = \frac{1}{2}.2x = x = f(x)$). Por lo tanto será, por 8.21.:

$$\int_a^b x\,dx = g(b) - g(a) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Es costumbre indicar lo anterior de la siguiente manera:

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

En particular es:

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.1^2 - \frac{1}{2}.0^2 = \frac{1}{2}$$

resulta que coincide con el obtenido en el Ejemplo 3 del parágrafo 8.1.

Análogamente, si $f(x) = x^2$, entonces una primitiva está dada por $g(x) = \frac{1}{3}x^3$, con lo cual:

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

En particular es $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$, resultado que coincide con el del Ejercicio 4.b. del parágrafo 8 1.

En general, para $n \in N$ es $\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b =$

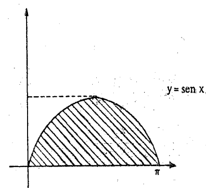
$$= \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Con la Regla de Barrow, el problema de calcular áreas de la región comprendida entre la gráfica de una función y el eje de abscisas se resuelve fácilmente . . . si uno puede encontrar una primitiva de la función. Por ejemplo, calculemos el área de la región comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y el eje de abscisas para x entre 0 y π. Para ello hay que encontrar una primitiva de la función seno.

Como $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$, entonces una primitiva de $\operatorname{sen} x$ es $-\cos x$. Luego el área buscada es:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = (-\cos x)\Big|_0^\pi = (-\cos\pi) - (-\cos 0) =$$

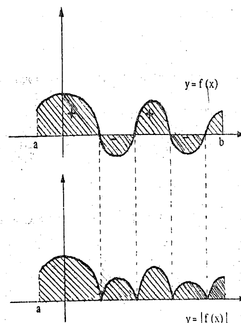
$$= (-(-1)) - (-1) = 2$$



Desde luego que encontrar primitivas no es tan fácil en general como en estos ejemplos. Más aún, en general es un problema imposible de resolver (piense el lector en una primitiva para la función e^{-x^2} . $\ln(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x})$, por ejemplo).

Hay métodos para calcular primitivas que resultan de gran eficacia en muchos casos, métodos que constituirán el tema del próximo capítulo. Por ahora sólo podemos calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ en los casos en que una primitiva de f se obtiene en forma inmediata (como en los ejemplos que vimos).

Antes de dejar este tema, digamos cómo se puede obtener el área entre la gráfica de una función y el eje de abscisas cuando la función no es positiva en todos los puntos. Si f es esa función, entonces consideramos la función $|f(x)|$ y la integramos en el intervalo en cuestión (ver figura; si integramos directamente f, las zonas de "área positiva" se van compensando con las zonas de "área negativa").



Por ejemplo, hallemos el área de la región comprendida entre la gráfica de $f(x) = \cos x$ y el eje de abscisas para x entre 0 y 2π, es decir, $\int_0^{2\pi} |\cos x|\,dx$.

Como $\cos x \geq 0$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y en $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ y $\cos x \leq$ ≤ 0 en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, resulta que esa área es:

$$\int_0^{2\pi} |\cos x|\,dx = \int_0^{\pi/2} |\cos x|\,dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\cos x|\,dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} |\cos x|\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-\cos x)\,dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x\,dx =$$

$$= \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi/2} + (-\operatorname{sen} x)\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} + (\operatorname{sen} x)\Big|_{3\pi/2}^{2\pi} =$$

$$= (\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0) + (-\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} - (-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2})) + (\operatorname{sen} 2\pi - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}) =$$

$$= (1-0) + (-(-1)-(-1)) + (0-(-1)) = 1+2+1 =$$

$$= 4$$

EJERCICIOS

1.

Sea f integrable sobre $[a, b]$ y supongamos que existe una función g tal que $g' = f$ (una primitiva de f)

♦ a) Si $\pi = [t_0, t_1, \ldots, t_n]$ es una partición de $[a, b]$, probar que, para $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = f(c_i)(t_i - t_{i-1})$$

para algún $c_i \in (t_{i-1}, t_i)$ (SUGERENCIA: Teorema 7.9. del Valor Medio).

♦ b) Usando a), probar que, para $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leqslant g(t_i) - g(t_{i-1}) \leqslant M_i(t_i - t_{i-1})$$

donde m_i y M_i son, como siempre, el ínfimo y el supremo de $[f(x): x \in [t_{i-1}, t_i]]$.

♦ c) Probar que

$$s_\pi(f) \leqslant g(b) - g(a) \leqslant S_\pi(f)$$

para toda partición π de $[a, b]$ (SUGERENCIA: sumar las desigualdades de b)).

♦ d) Concluir que

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

2.

Sea $f: R \to R$ *continua y, para* $a \in R$ *fijo, sea* $F: R \to R$ *definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Probar que $F'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in R$ *(SUGERENCIA: si* $x \geqslant a$, *es el Teorema 8.20.; si* $x < a$, *usar Definición 8.10.).*

Calcular las siguientes integrales:

- a) $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$;
- b) $\int_1^3 3x^2\,dx$;
- c) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$;
- d) $\int_0^2 (x^2 + 3x + 2)\,dx$ (Usar Proposición 8.11);
- e) $\int_0^1 \operatorname{ch} x\,dx$;
- f) $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$;
- g) $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$;
- h) $\int_1^2 x^a\,dx$ $(a \in R,\ a \neq -1)$

4.

Hallar el área de la región comprendida entre la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y el eje de abscisas para x entre 0 y 2π. Comparar con $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx$.

5.

Hallar el área de la región comprendida entre la gráfica de $f(x) = x^2 - 3x + 2$ *y el eje de abscisas para* x *entre* 0 *y* 4. *Comparar con* $\int_0^4 (x^2 - 3x + 2)\,dx$.

Sea $f: R \to R$ definida por $f(x) = [x]$ (parte entera de x) y sea $F: R \to R$ definida por $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

¿Cuánto valen $F'_+(m)$ y $F'_-(m)$ para $m \in Z$? ¿Cuánto vale $F'(x_0)$ para $x_0 \notin Z$?

7.

Dar un ejemplo de una función $f: R \to R$ integrable tal que $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ sea derivable en todo punto, pero para la que no sea $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in R$ (SUGERENCIA: ver Ejercicio 6 de parágrafo 8.1.).

8.

Si $f: [a, b] \to R$ *es integrable, probar que* $F: [a, b] \to R$ *dada por* $F(x) = \int_x^b f(t)\,dt$ *es uniformemente continua. (Imitar 8.19.)*

8.5.

INTEGRALES IMPROPIAS

Hasta ahora sólo hemos considerado la noción de integral para funciones acotadas y definidas en un intervalo cerrado $[a, b]$ (aún así, a veces la integral no existe; ver Ejemplo 2 del parágrafo 8.1.). En este parágrafo vamos a eliminar esas restricciones y definir la integral (cuando se pueda) de funciones no acota-

das o definidas en intervalos no acotados $((a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ o $(-\infty, \infty) = R)$. A este tipo de integrales se las suele denominar *integrales impropias*.

DEFINICION 8.22.

Sea $f: (a, b] \to R$ una función con la siguiente propiedad: para todo $c \in (a, b]$, f es integrable sobre $[c, b]$. Definimos entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

si ese límite existe.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Por ejemplo, es:

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c \to 0^+} \sqrt{x}\,\Big|_a^1 =$$

$$= \lim_{c \to 0^+} (\sqrt{1} - \sqrt{c}) = \sqrt{1} - 0 =$$

$$= 1$$

DEFINICION 8.23.

Sea $f: [a, b) \to R$ una función con la siguiente propiedad: para todo $c \in [a, b)$, f es integrable sobre $[a, c]$. Definimos entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_b^c f(x)\,dx$$

si ese límite existe.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

DEFINICION 8.24.

Sea $f: (a, b) \to R$ una función con la siguiente propiedad: para todo c_1 y todo c_2 (con $c_1 < c_2$) en (a, b), f es integrable sobre $[c_1, c_2]$.

Definimos entonces, si x_0 es un punto cualquiera de (a, b):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c_1 \to a^+} \int_{c_1}^{x_0} f(x)\,dx + \lim_{c_2 \to b^-} \int_{x_0}^{c_2} f(x)\,dx$$

si los dos límites existen.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

DEFINICION 8.25.

Sea $f: [a, b] \to R$ una función con la siguiente propiedad: existe $x_0 \in (a, b)$ tal que, para todo $c_1 \in [a, x_0)$, f es integrable sobre $[a, c_1]$, y para todo $c_2 \in (x_0, b]$, f es integrable sobre $[c_2, b]$.

Definimos entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c_1 \to x_0^-} \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \lim_{c_2 \to x_0^+} \int_{c_2}^b f(x)\,dx$$

si ambos límites existen.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

Por ejemplo, sea $f: [-1, 1] \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{x^{1/3}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

(el valor en 0 no importa).

Entonces f está en las condiciones de 8.25. para $x_0 = 0$. Con lo cual es:

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \lim_{c_1 \to 0^-} \int_{-1}^{c_1} x^{-1/3}\,dx + \lim_{c_2 \to 0^+} \int_{c_2}^1 x^{-1/3}\,dx = \quad \text{(Ejercicio 3.h. de parágrafo 8.4.)}$$

$$= \lim_{c_1 \to 0^-} \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_{-1}^{c_1} + \lim_{c_2 \to 0^+} \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_{c_2}^{1} =$$

$$= \lim_{c_1 \to 0^-} \frac{3}{2} (c_1^{2/3} - (-1)^{2/3}) + \lim_{c_2 \to 0^+} \frac{3}{2} (1^{2/3} - c_2^{2/3}) =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot (0 - (1)) + \frac{3}{2} (1 - 0) = 0$$

En cambio, si consideramos $f: [-1, 1] \to R$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

entonces no está definida $\int_0^1 f(x)\,dx$. En efecto:

$$\int_{c_2}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{c_2}^1 x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_{c_2}^1 = -1 + \frac{1}{c_2}$$

y esto tiende a $+\infty$ cuando $c_2 \to 0^+$, es decir, no existe

$$\lim_{c_2 \to 0^+} \int_{c_2}^1 f(x)\,dx$$

(tampoco existe $\lim_{c_1 \to 0^-} \int_{-1}^{c_1} f(x)\,dx$, pues tiene límite $-\infty$).

Observemos que, en las definiciones dadas, no estamos suponiendo f integrable en $[a, b]$ pero tampoco estamos suponiendo que f *no* es integrable en $[a, b]$. En otras palabras, tal como están formuladas, esas definiciones se pueden aplicar a funciones que ya tienen una integral entre a y b. Con lo cual hay dos definiciones, en este caso, para $\int_a^b f(x)\,dx$ (una es 8.7.; la otra es 8.22., 8.23., 8.24., u 8.25. según el caso). Afortunadamente estas dos definiciones coinciden, como el lector puede deducir inmediatamente de 8.19. y del Ejercicio 8 del parágrafo anterior.

Hemos ampliado el concepto de función integrable sobre un intervalo cerrado; de ahora en adelante, que f sea integrable sobre $[a, b]$ significa que lo es en el sentido de la Definición 8.7. o que existe alguno de los límites indicados en las Definiciones 8.22., 8.23., 8.24., u 8.25.

DEFINICION 8.26.

Sea $f: [a, b] \to R$ una función con la siguiente propiedad: existen $c_1, \ldots, c_n \in [a, b]$, $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$, tales que f es integrable sobre $[a, c_1]$, sobre $[c_1, c_2], \ldots$, sobre $[c_{n-1}, c_n]$ y sobre $[c_n, b]$. Definimos entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\,dx + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx$$

Esta definición termina con la ampliación del concepto de función integrable para funciones definidas en intervalos cerrados. (se podría aplicar a f (x) =

Pasamos ahora a ampliar la noción de función integrable para funciones definidas en intervalos no acotados. La frase "f integrable sobre [a, b]" puede significar ahora, además de todo lo antedicho, la situación dada en 8.26.

DEFINICION 8.27.

Sea $f: [a, +\infty) \to R$ una función con la siguiente propiedad: para todo $c \in [a, +\infty)$ (o sea, para todo $c \geqslant a$), f es integrable sobre $[a, c]$. Definimos entonces:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

si este límite existe.

DEFINICION 8.28.

Sea $f: R \to R$ una función con la siguiente propiedad: existe $a \in R$ tal que existen $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ y $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$. Definimos entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

Por ejemplo, sea $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f: [1, +\infty) \to R$. Entonces:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} x^{-2}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_1^M x^{-2}\,dx =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^M = \lim_{M\to+\infty} \left(-\frac{1}{M} + 1\right) = 1$$

Si existe el límite indicado en la Definición 8.27.

se suele decir, para abreviar, que "la integral $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es *convergente*". Análogamente se dice que "la integral $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ es *convergente*" si existe el límite indicado en 8.28. Finalmente, "la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ es *convergente*" significa que existe el límite indicado en 8.29.

Para establecer la convergencia de integrales (aunque sin saber a qué convergen), resulta muchas veces útil el llamado criterio de comparación. Para establecerlo, necesitamos primero un lema auxiliar.

LEMA 8.29.

- a) Si $f: (a, b) \to R$ es creciente y acotada superiormente, entonces existe $\lim_{x\to b^-} f(x)$.
- b) Si $f: (a, +\infty) \to R$ es creciente y acotada superiormente, entonces existe $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

Demostración

- a) Si $A = [f(x): x \in (a, b)]$, entonces A es acotado superiormente por hipótesis (eso es lo que quiere decir que f sea acotada superiormente). Como es claramente no vacío (estamos suponiendo $a < b$), entonces existe:

$$s = \sup A$$

Afirmamos que $\lim_{x\to b^-} f(x) = s$. Para probarlo, dado $\epsilon > 0$ arbitrario sabemos que existe un elemento de A, es decir, un $f(x_0)$ para un cierto $x_0 \in (a, b)$, tal que $s - \epsilon < f(x_0)$. Luego, para $x_0 < x < b$:

$$s - \epsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant s < s + \epsilon$$

En otras palabras, si $0 < b - x < \delta$ (con $\delta = b - x_0$), entonces $|f(x) - s| < \epsilon$, lo que prueba l[illegible]rmado.

- b) La demostración es totalmente similar (Hacerla). ///

PROPOSICION 8.30.
(CRITERIO DE COMPARACION)

- a) Si $f, g: [a, b] \to R$ son tales que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b)$, f integrable sobre $[a, x]$ para todo $x \in [a, b)$ y g es integrable sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$.
- b) Si $f, g: [a, +\infty) \to R$ son tales que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \geqslant a$, f integrable sobre $[a, x]$ para todo $x \geqslant a$ y si $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente.

Demostración

Basta demostrar, por ejemplo, la parte b) (la otra es igual).

Sean:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad , \quad G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

Entonces F y G son crecientes; en efecto, si $x_1 < x_2$:

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t)\,dt = \int_a^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt - \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt =$$

$$= \int_a^{x_2} f(t)\,dt - \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt = F(x_2) - \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant F(x_2)$$

ya que $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \geqslant 0$ (por ser $f \geqslant 0$).

La misma cuenta, con G en lugar de F y g en lugar de f, prueba que G es creciente. Al existir $\lim_{x\to+\infty} G(x)$, resulta G acotada superiormente. En efecto, si $m = \lim_{x\to+\infty} G(x)$, entonces, tomando $\epsilon = 1$, debe ser $m - 1 < G(x) < m + 1$ para $x \geqslant M$. Luego $G(x) < m + 1$ para $x = M$; pero si $x < M$, entonces $G(x) \leqslant G(M) < m + 1$, con lo cual $m + 1$ es cota superior de G.

Ahora aplicamos la hipótesis: al ser $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \geqslant a$, entonces es:

$$F(x) \leqslant G(x) \qquad \text{para todo} \qquad x \geqslant a$$

por Ejercicio 2 de parágrafo 8.2. Luego $F(x) < m + 1$ para todo $x \geqslant a$, o sea F está acotada superiormente. Por Lema 8.29. b, existe $\lim_{x\to+\infty} F(x)$, que es lo que queríamos demostrar. ///

Por ejemplo, la integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ es convergente pues:

$$\frac{1}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

y

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^{\infty} x^{-2}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_1^{M} x^{-2}\,dx =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^M = \lim_{M\to+\infty} \left(-\frac{1}{M} + 1\right) = 1,$$

o sea, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ es convergente.

EJERCICIOS

1.

• a) Probar que la integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ es convergente para $p > 1$ y no convergente para $p \leqslant 1$.

• b) Probar que la integral $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ existe para $p < 1$ y no existe para $p \geqslant 1$.

• c) Deducir que la integral $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ no es convergente para ningún $p \in \mathbb{R}$.

2.

Estudiar la convergencia de las siguientes integrales:

■ a) $\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx$;

■ b) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1}\,dx$;

■ c) $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\,dx$;

■ d) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$;

■ e) $\int_0^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$;

■ f) $\int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x}\,dx$;

3.

Estudiar la convergencia de las siguientes integrales usando el Criterio de Comparación:

★ *a)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1}\,dx$;

★ *b)* $\int_2^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$;

★ *c)* $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{3x^4-2x^2+1}\,dx$;

★ *d)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen} x}{x^2+1}\,dx$;

★ *e)* $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x}\,dx$;

★ *f)* $\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx$;

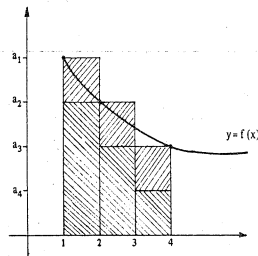
★ *g)* $\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx$;

★ *h)* $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x+e^{-x}}$;

★ *i)* $\int_0^{\infty} e^{-tx} \qquad (t \in \mathbb{R})$

4.

Sea $(a_n)_{n\geqslant 1}$ una sucesión decreciente de términos no negativos y sea $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función decreciente tal que, para $n \in \mathbb{N}$, sea $f(n) = a_n$.



♦ a) Probar que, cualquiera sea $n \in N$, $n > 1$:

$$a_n \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx \leqslant a_{n-1}$$

♦ b) Deducir que

$$S_n - a_1 \leqslant \int_{1}^{n} f(x)\, dx \leqslant S_{n-1}$$

♦ c) Probar, en base a b), que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y sólo si $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ es convergente (Criterio de la integral de Cauchy).

♦ d) Aplicar el Criterio de la integral de Cauchy para estudiar la convergencia de la serie armónica generalizada, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

5.

● a) Sea $f: [a, +\infty) \to R$ una función con la siguiente propiedad: dado $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que, si $x > M$ y $x' > M$, entonces $|f(x) - f(x')| < \epsilon$.

Probar que existe $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

● b) Sea $f: [a, b) \to R$ una función con la siguiente propiedad: dado $\epsilon > 0$ existe $c \in [a, b)$ tal que si $c < x < b$ y $c < x' < b$, entonces $|f(x) - f(x')| < \epsilon$.

Probar que existe $\lim_{x \to b^-} f(x)$.

6.

★ a) Se dice que $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ *converge absolutamente* si la integral $\int_a^{\infty} |f(x)|\, dx$ es convergente (o sea, existe $\lim_{c \to +\infty} \int_a^c |f(x)|\, dx$). Probar que si $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ converge absolutamente y f es integrable sobre $[a, x]$ para todo $x \geqslant a$, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ converge (o sea, existe $\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\, dx$; usar ejercicio anterior, parte a).

★ b) Con los enunciados correspondientes, probar que si $\int_a^b f(x)\, dx$ converge absolutamente, entonces $\int_a^b f(x)\, dx$ converge (Ejercicio 5.b.).

7.

Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes integrales:

■ *a)* $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1}$;

■ *b)* $\int_0^1 \operatorname{sen} \frac{1}{x}\, dx$;

■ *c)* $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}\, dx$.

APENDICE

DEFINICION ANALITICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Ahora vamos a ver cómo, con las nociones desarrolladas en este Capítulo, es posible dar una definición de las funciones trigonométricas que depende solamente, en última instancia, de las catorce propiedades básicas del conjunto de los números reales listadas en el Capítulo 1 (y no de propiedades del plano que hemos usado en el Apéndice al Capítulo 5 sin demostrarlas).

La clave para dar esta definición, según lo apuntamos en el Capítulo 7, es el hecho de que la derivada de la función **arc sen**: $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (función inversa del seno) es la función $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ (para $-1 < x < 1$). Por lo tanto, por la regla de Barrow (Corolario 8.21.), debe ser

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \operatorname{arc\,sen} x - \operatorname{arc\,sen} 0 = \operatorname{arc\,sen} x$$

(ya que $\operatorname{arc\,sen} 0 = 0$).

Entonces, olvidándonos de todo lo que hemos dicho sobre funciones trigonométricas, podemos *comenzar* definiendo **arc sen x** como esa integral:

DEFINICION A.1.

Llamaremos *arco seno* a la función arc sen: $[-1, 1] \to R$ definida por:

$$\operatorname{arc\,sen} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★

Observación

La integral que define arc sen 1 y arc sen (−1) es una integral impropia (la funcion $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ no es acotada en $(-1, 1)$), así que hay que verificar previamente que converge.

Esta convergencia se deduce del criterio de comparación: para $0 < x < 1$ es:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x)(1 + x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x}\,\sqrt{1 + x}} < \frac{1}{\sqrt{1 - x}}$$

y la integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x}}\, dx$ converge (una primitiva es $-\frac{1}{2}\sqrt{1 - x}$, como se puede verificar). Análogamente, para $-1 < x < 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x}\,\sqrt{1 + x}} < \frac{1}{\sqrt{1 + x}}$$

y la integral $\int_0^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + x}}\, dx = -\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1 + x}}\, dx$ con-

verge (una primitiva es $\frac{1}{2}\sqrt{1+x}$).

Como, por Teorema Fundamental del Cálculo, es $(\text{arc sen } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$ en $(-1, 1)$, entonces arc sen es estrictamente creciente en $[-1, 1]$. Llamando $\pi = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ (si uno prescinde de consideraciones geométricas, el número π debe ser definido), entonces resulta:

$$\text{arc sen}: [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

estrictamente creciente y continua. Luego existe inversa:

$$\text{sen}: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

La derivada de esta función se calcula fácil por Teorema 7.14.:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

o sea:

$$(\text{sen } x)' = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-f^{-1}(x)^2}}} = \sqrt{1-f^{-1}(x)^2} =$$

$$= \sqrt{1-\text{sen}^2 x}$$

Llamando, para $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos x = \sqrt{1-\text{sen}^2 x}$, resulta entonces:

$$(\text{sen } x)' = \cos x \qquad (*)$$

Ahora se extienden estas funciones a todo $\mathbb{R}$, como hicimos en el Apéndice al Capítulo 5, y se puede verificar que sigue valiendo (*), así como la relación:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Esto es sólo un bosquejo incompleto (ver los ejercicios a continuación para completar) de una definición analítica de las funciones trigonométricas y de la demostración de sus propiedades.

De todas maneras, a este tipo de funciones conviene pensarlas geométricamente, y el presente Apéndice lo único que debe dejar en el lector es el saber que *hay* una manera rigurosa de definir las funciones trigonométricas y de probar sus propiedades elementales.

EJERCICIOS

1.

Probar que $\text{sen } 0 = 0$ y que $\cos 0 = 1$. Definir sen x y cos x para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.

Probar que $(\cos x)' = -\text{sen } x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3.

Probar que $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ *(Usar (*), con lo cual es inmediato).*

4.

★ a) Probar que si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface:

$$\begin{cases} f''(x) + f(x) = 0 & \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

entonces $f = 0$ (SUGERENCIA: calcular $[(f')^2 + f^2]'$).

★ b) Probar que si f satisface:

$$\begin{cases} f''(x) + f(x) = 0 & \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = a_1 \\ f'(0) = a_2 \end{cases}$$

entonces $f(x) = a_1 \cos x + a_2 \text{ sen } x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (SUGERENCIA: aplicar la parte a) a la función $f(x) = a_1 \cos x - a_2 \text{ sen } x$).

★ c) Probar que, cualesquiera sean $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\text{sen}(x + y) = \text{sen } x \cos y + \cos x \text{ sen } y$$

(SUGERENCIA: para cada y *fijo*, considerar $f(x) = \text{sen}(x + y)$. Probar que $f'(0) = \cos y$ y $f''(0) = -\text{sen } y$, y aplicar la parte b)).

★ d) Probar que, cualesquiera sean $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x, y) = \cos x \cos y - \text{sen } x \text{ sen } y$$

CAPITULO IX

Cálculo de Primitivas

9.1. INTRODUCCION

Según vimos en el capítulo anterior, si una función continua f tiene una primitiva, es decir, si existe una función F tal que $F'(x) = f(x)$ para todo x en el dominio de f, entonces la integral sobre $[a, b]$ de f es, por la regla de Barrow:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

De esta manera, el problema de hallar integrales pasa a ser un problema de encontrar primitivas.

Indicaremos al conjunto de las primitivas de f con el siguiente símbolo:

$$\int f(x)\,dx$$

y lo llamaremos *integral indefinida* de f. En este contexto, *integrar* f significará encontrar la integral indefinida de f, o sea, todas sus primitivas.

Notemos que si F es una primitiva de f, entonces, por Corolario 7.12., toda otra primitiva de f será de la forma $F(x) + C$, $C \in R$ (para cada C, una primitiva). Indicamos este hecho de la siguiente manera:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (C \in R) \qquad (1)$$

Por lo tanto, calcular la integral indefinida de una función f se reduce a encontrar *una* primitiva cualquiera. Lo cual no es nada fácil en general (¿cuál sería una primitiva de $\operatorname{sen}(e^{x^2}).\operatorname{arc\,tg}(\ln x)$?).

Desde luego, en algunos casos es sencillo encontrar primitivas. Por ejemplo, si $f(x) = 2x$, entonces $f(x)$ es la derivada de $g(x) = x^2$. Luego:

$$\int 2x \, dx = x^2 + C$$

Análogamente, si $f(x) = \cos x$, entonces una primitiva de $f(x)$ es $g(x) = \text{sen } x$ (pues la derivada del seno es el coseno). Luego:

$$\int \cos x \, dx = \text{sen } x + c$$

Indicamos en una tabla algunas funciones para las cuales es inmediato encontrar la integral indefinida:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x^a \quad (a \neq -1)$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
e^x	$e^x + c$
$\text{sen } x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\text{sen } x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arc sen } x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arc tg } x + c$
$\text{ch } x$	$\text{sh } x + c$
$\text{sh } x$	$\text{ch } x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\text{arg sh } x + c$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\text{arg ch } x + c$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\text{arg th } x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\text{tg } x + c$
$\frac{1}{\text{sen}^2 x}$	$-\text{cotg } x + c$

Desde luego, así no vamos a llegar muy lejos. A menos que encontremos métodos que faciliten el problema de hallar primitivas, sólo podremos integrar funciones que hayamos obtenido previamente derivando otras funciones.

El desarrollo de estos métodos es el objeto del presente capítulo, pero digamos desde ya que el procedimiento de integración no tendrá el automatismo que hemos conseguido en el Capítulo 7 para el procedimiento de derivación.

EL METODO DE SUSTITUCION

Para explicar el método de sustitución, probamos primero un resultado muy sencillo:

PROPOSICION 9.1.

Si F es una primitiva de f, entonces $F \circ g$ es una primitiva de $(f \circ g) . g'$.

Demostración

Por la Regla de la cadena (Teorema 7.6.) es:

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) . g'(x) = \quad \text{(por ser F primitiva de f)}$$
$$= f(g(x)) . g'(x) =$$
$$= (f \circ g)(x) . g'(x) \; ///$$

Veamos una forma de escribir la Proposición 9.1, que resulta muy práctica.

Lo que esta Proposición afirma se puede poner, por (1), de la siguiente manera:

$$\int f(g(x)) . g'(x) \, dx = F \circ g(x) + C$$

o sea

$$\int f(g(x)) . g'(x) \, dx = F(g(x)) + C$$

Llamando $u = g(x)$, podemos escribir la igualdad anterior como:

$$\int f(u) . u' \, dx = F(u) + C$$

o sea, por (1):

$$\int f(u) . u' \, dx = \int f(u) \, du \qquad (2)$$

Notemos que si quedamos de acuerdo en que

$$du = u' \, dx \qquad (3)$$

(aunque los términos de esta igualdad sean sólo símbolos y la igualdad (3) carezca de sentido), entonces de (3) resulta (2). Por ello, para aplicar en la práctica la Proposición 9.1, para calcular primitivas se sigue el siguiente método, llamado *método de sustitución:*

- 1) Llamar $u = g(x)$ y sustituir todas las $g(x)$ por u en la integral.
- 2) Sustituir $u'dx$ (o sea, $g'(x)\,dx$) por du.
- 3) Calcular la integral indefinida que resulte (quedará como función de u).
- 4) En el cálculo hecho en 3), escribir $g(x)$ donde aparezca u.

Veamos algunos ejemplos de aplicación de este método:

EJEMPLO 1

Calcular la integral (indefinida):

$$\int \text{sen}^2 x . \cos x \, dx$$

Para ello, llamamos:

$$u = \text{sen } x$$

con lo cuál:

$$du = u' dx = \cos x \, dx$$

Entonces será:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx = \int (\operatorname{sen} x)^2 \cos x\, dx =$$
$$= \int u^2 . du = \text{ (ver tabla)}$$
$$= \frac{u^3}{3} + C = \text{ (paso 4))}$$
$$= \frac{(\operatorname{sen} x)^3}{3} + C =$$
$$= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

Se puede verificar ahora que la derivada de cualquiera de las funciones encontradas ($\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$ para $C \in \mathbb{R}$) es efectivamente $\operatorname{sen}^2 x . \cos x$.

EJEMPLO 2

Calcular la integral:

$$\int \frac{1}{2x+1}\, dx$$

Llamemos:

$$u = 2x + 1$$

Entonces será:

$$du = u'dx = 2\, dx$$

o, lo que es lo mismo:

$$dx = \frac{1}{2}\, du$$

Luego:

$$\int \frac{1}{2x+1}\, dx = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2}\, du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u}\, du =$$
$$= \frac{1}{2} (\ln|u| + C) = \frac{1}{2} (\ln|2x+1| + C) =$$
$$= \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C' \qquad (C' = \frac{1}{2} C)$$

EJEMPLO 3

Calcular la integral:

$$\int \operatorname{tg} x\, dx$$

Como $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, llamemos:

$$u = \cos x$$

con lo cual:

$$du = - \operatorname{sen} x\, dx$$

o sea:

$$\operatorname{sen} x\, dx = - du$$

Luego:

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = \int \frac{1}{\cos x} \operatorname{sen} x\, dx =$$
$$= \int \frac{1}{u} (- du) = - \int \frac{1}{u}\, du =$$
$$= - \ln|u| + C = - \ln|\cos x| + C$$

EJEMPLO 4

Calcular la integral:

$$\int \frac{x^5}{(1+x^2)^4}\, dx$$

Llamamos:

$$u = 1 + x^2 \qquad \text{(luego, } x^2 = u - 1)$$

con lo cual:

$$du = 2x\, dx \qquad \text{(luego, } x\, dx = \frac{1}{2}\, du)$$

Entonces es:

$$\int \frac{x^5}{(1+x^2)^4}\, dx = \int \frac{x^4}{(1+x^2)^4}\, x dx = \int \frac{(x^2)^2}{(1+x^2)^4}\, x dx =$$
$$= \int \frac{(u-1)^2}{u^4} \frac{1}{2}\, du = \frac{1}{2} \int \frac{u^2 - 2u + 1}{u^4}\, du =$$
$$= \frac{1}{2} \int (\frac{1}{u^2} - \frac{2}{u^3} + \frac{1}{u^4})\, du =$$
$$= \frac{1}{2} \int (u^{-2} - 2u^{-3} + u^{-4})\, du =$$
$$= \frac{1}{2} (\int u^{-2} du - 2 \int u^{-3} du + \int u^{-4} du) = \text{ (ver tabla)}$$
$$= \frac{1}{2} (\frac{u^{-1}}{-1} - 2 \frac{u^{-2}}{-2} + \frac{u^{-3}}{-3} + C) =$$
$$= \frac{1}{2} (- \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{3u^3} + C) =$$
$$= - \frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2(1+x^2)^2} - \frac{1}{6(1+x^2)^3} + C'$$

NOTAS

★ 1) Hemos usado en estos ejemplos las dos siguientes propiedades:

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$
$$\int c . f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$

consecuencias inmediatas de la definición de primitiva y de las análogas propiedades de la derivación.

★ 2) En algunos de los ejemplos anteriores, las sustituciones a hacer eran evidentes. En otros,

por caso el 4), no lo era así. En general, entonces, el método de sustitución no es automático y requiere pericia por parte del que lo practica. Pericia que, como siempre, se consigue peleándose con los ejercicios.

EJERCICIOS

1.

Probar que $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f \circ g(x) . g'(x)\,dx$, *cualquiera sea la función continua* f *y la función derivable* g.

2.

Hallar las primitivas de la función f, siendo f (x) igual a:

- ● a) $4x^3 - 3x + 6$
- ● b) $\dfrac{1}{x^{15}}$
- ● c) $3e^x$
- ● d) $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$
- ● e) $x\sqrt{x}$
- ● f) $\dfrac{x^3 + 3\sqrt{x} - 1}{x^2}$
- ● g) $\dfrac{(\sqrt{x} + \sqrt{a})^2}{x}$
- ● h) $\dfrac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

3.

Usar el método de sustitución para hallar las primitivas de la función f, siendo f (x) igual a:

- ▲ a) $x\sqrt{x^2 - 2}$
- ▲ b) $\dfrac{x}{x^2 + 1}$
- ▲ c) $3 \operatorname{sen} 4x - \cos 2x$
- ▲ d) $\operatorname{sen}^6 x \cos x$
- ▲ e) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$
- ▲ f) e^{-x}
- ▲ g) e^{3x}
- ▲ h) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ (multiplicar y dividir por $\sqrt{1+x}$)
- ▲ i) $\dfrac{e^x}{1 + e^x}$
- ▲ j) $\operatorname{sen}^2 x$ (usar $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$)
- ▲ k) $\cos^2 x$
- ▲ l) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}$
- ▲ m) $x^4 \cos x^5$
- ▲ n) $\dfrac{2x^2}{\operatorname{sen} x^3}$
- ▲ o) $(2x - 1)^2$
- ▲ p) $x \operatorname{sen} x^2$
- ▲ q) $\dfrac{1}{4x + 3}$
- ▲ r) $2x\sqrt{1 - x^2}$
- ▲ s) $(3x^2 + 1)\sqrt{x^3 + x}$
- ▲ t) $x(5x^2 - 3)^7$
- ▲ u) $\dfrac{e^{ax}}{\sqrt{1 - e^{ax}}}$
- ▲ v) $\dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

- ▲ w) $\dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
- ▲ x) $\dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1 - x^2}}$
- ▲ y) $\dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$
- ▲ z) $\dfrac{\ln x}{x}$

4.

Sabiendo que $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ *, calcular las primitivas de* f*, siendo* f (x) *igual a:*

- ♦ *a)* $\dfrac{1}{1 + 4x^2}$
- ♦ *b)* $\dfrac{1}{3 + 27x^2}$
- ♦ *c)* $\dfrac{1}{4 + 9x^2}$
- ♦ *d)* $\dfrac{1}{5 + 2x^2}$
- ♦ *e)* $\dfrac{1}{x^2 + 6x + 11}$ *(completar cuadrados)*
- ♦ *f)* $\dfrac{1}{3x^2 + 5x + 4}$
- ♦ *g)* $\dfrac{1}{x^2 - 4x + 9}$
- ♦ *h)* $\dfrac{2x - 3}{x^2 + 1}$
- ♦ *i)* $\dfrac{3x + 1}{2x^2 + 4x + 7}$

(SUGERENCIA para i): $3x + 1 = 3\,(x + 1/3) = 3\left(\dfrac{1}{4} . 4x + \dfrac{4}{4} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{4}\right) = \dfrac{3}{4}(2x^2 + 4x + 7)' + 3\left(\dfrac{1}{3} - 1\right)$; *o sea, escribimos el numerador como un múltiplo de la derivada del denominador más un número).*

5.

Sabiendo que $(\operatorname{arc\,sen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, calcular las primitivas de f, siendo f (x) igual a:

- ★ a) $\dfrac{1}{\sqrt{1 - 9x^2}}$
- ★ b) $\dfrac{1}{\sqrt{9 - 4x^2}}$
- ★ c) $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 2}}$
- ★ d) $\dfrac{1}{\sqrt{1 - 6x - x^2}}$
- ★ e) $\dfrac{1}{\sqrt{14 - 2x - 3x^2}}$

6.

Calcular las primitivas de f, siendo f (x) igual a:

- ■ a) $\dfrac{1}{1 - 16x^2}$
- ■ b) $\dfrac{2x - 1}{2 - 3x^2}$

c) $\dfrac{1-x}{4-3x-2x^2}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{5x^2-3}}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-3x-6}}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{6x^2+1}}$

h) $\dfrac{1}{\sqrt{3x^2+2x+7}}$

i) $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+3x+4}}$

7.

Hacer la sustitución $x = \text{sen } u$ (o sea, $u = \text{arc sen } x$) para calcular las primitivas de $\sqrt{1-x^2}$. Usar el resultado para calcular las primitivas de:

a) $\sqrt{4-3x^2}$

b) $\sqrt{2-3x-x^2}$

c) $\sqrt{2x+4-3x^2}$

d) $(2x-1)\sqrt{1-x^2}$

e) $(-x+2)\sqrt{2-x-x^2}$

8.

Hacer la sustitución $x = \text{sh } u$ para calcular las primitivas de $\sqrt{1+x^2}$. Usar el resultado para calcular las primitivas de:

a) $\sqrt{\frac{1}{3}x^2+6}$

b) $\sqrt{3x^2+2x+9}$

c) $\sqrt{4x^2+6x+10}$

d) $(3x+1)\sqrt{1+x^2}$

e) $(2x-3)\sqrt{2x^2+x+6}$

9.

Hacer la sustitución $x = \text{ch } u$ para calcular las primitivas de $\sqrt{x^2-1}$. Usar el resultado para calcular las primitivas de:

a) $\sqrt{4x^2-3}$

b) $\sqrt{x^2-3x-2}$

c) $(2x+4)\sqrt{x^2-2x-5}$

9.3.

EL METODO DE INTEGRACION POR PARTES

Sean u y v dos funciones derivables. La Proposición 7.4. nos dice que es:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

o sea:

$$u'v = (uv)' - uv'$$

Entonces resulta:

$$\int u'v\,dx = \int (uv)'\,dx - \int uv'\,dx$$

Como una primitiva de $(uv)'$ es la misma uv; entonces podemos escribir:

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx \qquad (4)$$

La igualdad (4) resulta muy útil para calcular ciertas integrales.

Veamos un par de ejemplos.

EJEMPLO 1

Calcular la integral

$$\int x\,e^x\,dx$$

Si consideramos en este caso:

$$u' = e^x$$
$$v = x$$

entonces será:

$$u = e^x$$
$$v' = 1$$

y entonces, por (4):

$$\int x\,e^x\,dx = \int e^x . x\,dx = e^x . x - \int e^x . 1\,dx =$$
$$= x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - (e^x + c) =$$
$$= x\,e^x - e^x + c' \qquad (c' = -c)$$
$$= (x-1)\,e^x + c'$$

EJEMPLO 2

Calcular la integral:

$$\int \ln x\,dx$$

Como $\ln x\,dx = 1 . \ln x\,dx$, consideramos:

$$u' = 1$$
$$v = \ln x$$

con lo cual:

$$u = x$$
$$v' = \frac{1}{x}$$

y entonces, por (4):

$$\int \ln x\,dx = x . \ln x - \int x . \frac{1}{x}\,dx =$$
$$= x . \ln x - \int 1 . dx = x \ln x - (x + c) =$$
$$= x . \ln x - x + c' =$$
$$= x\,(\ln x - 1) + c'$$

Como se ve en estos ejemplos, el método de integración por partes permite, en algunos casos, pasar del cálculo de una integral complicada al cálculo de una integral más sencilla (siempre usando (4)).

En cada ejercicio, la dificultad estará en elegir cuál factor de la función a integrar se considerará como u' y cuál como v, de modo que la integral de uv' resulte calculable (si en el Ejemplo 1 hubiéramos tomado $x = u'$, $e^x = v$, entonces quedaría $\int x\,e^x\,dx = \frac{x^2}{2}\,e^x - \int \frac{x^2}{2} . e^x\,dx$, y la nueva integral a calcular es más complicada que la anterior).

Antes de pasar a los ejercicios, veamos un ejemplo de uso reiterado de la igualdad (4).

EJEMPLO 3

Calcular la integral:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

Para ello consideramos:

$$u' = e^x$$
$$v = \operatorname{sen} x$$

con lo cual:

$$u = e^x$$
$$v' = \cos x$$

y entonces, por (4):

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx \qquad (5)$$

Ahora tenemos que calcular $\int e^x \cos x\, dx$. Para ello, consideramos:

$$u' = e^x$$
$$v = \cos x$$

con lo cual:

$$u = e^x$$
$$v' = -\operatorname{sen} x$$

Entonces, por (4):

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x - \int e^x (-\operatorname{sen} x)\, dx =$$
$$= e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

Si reemplazamos en (5):

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx \quad (6)$$

No se ve en principio ninguna ganancia en haber llegado a (6), ya que aparece la misma integral que queríamos calcular al principio. Pero, si pasamos esa integral al primer miembro, resulta:

$$2 \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x (\operatorname{sen} x - \cos x)$$

o sea:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{2}\, e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) \qquad (7)$$

Hemos perdido alguna constante en el camino. Si el segundo miembro de (7) es una primitiva de $e^x \operatorname{sen} x$ (cosa que el lector puede verificar derivando dicho segundo miembro), entonces el resultado final debe ser:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{2}\, e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + C$$

NOTA

Tanto en este parágrafo como en el anterior, el lector notará que nos hemos tomado ciertas licencias en cuanto al rigor de los procedimientos (que quedaron patentes en el ejemplo recién visto, en el que misteriosamente desapareció en un momento dado la constante **C** de integración y acto seguido fue incorporada de facto).

El origen de estas licencias se encuentra en la igualdad (1) que, analizada literalmente, carece de sentido: el primer miembro designa un conjunto de funciones (las primitivas de **f**) y el segundo es un número real, puesto que **F (x)** es un número (el valor de **F** en **x**) y **C** es otro número. Mientras (1) sea sólo una notación que haya que interpretar como una igualdad entre conjuntos, no hay objeciones. Pero cuando, como lo hemos hecho, empieza a usarse como una igualdad entre números, aparecen dificultades como las que acabamos de encontrar.

Se pueden encontrar una notación coherente y un procedimiento riguroso para justificar el cálculo de primitivas tal como lo hemos hecho, pero ello carece de sentido por dos razones:

- i) los procedimientos informales que hemos usado, y que seguiremos usando, son mucho más sencillos y rápidos;
- ii) una vez encontrada una supuesta primitiva, la validez del resultado es muy fácil de verificar: su derivada debe ser la función integrando. Luego una simple derivación aventará toda duda.

La razón ii) es la decisiva, ya que hay capítulos enteros de la Matemática en los que, actualmente, se enfatiza el rigor sacrificando rapidez, sencillez y practicidad en aras de un conocimiento mejor fundamentado.

Lo que tienen en común estos casos en donde se prefiere el rigor es que no hay (como en el cálculo de primitivas) una manera sencilla de verificar la validez de un resultado, siendo su demostración rigurosa lo único que los puede sostener.

Una vez leída esta nota, debe ser rápidamente dejada de lado y se deben adoptar los procedimientos usados con todo entusiasmo. En los siguientes ejercicios, por ejemplo.

EJERCICIOS

1.

Calcular las primitivas de la función **f**, siendo **f (x)** igual a:

▲ a) $x . \operatorname{sen} x$

▲ b) $x . \cos x$

▲ c) $\operatorname{arc\,tg} x$

▲ d) $x . \ln x$

▲ e) $\dfrac{x}{e^x}$

▲ f) $e^{2x} \operatorname{sen} 3x$

▲ g) $e^{ax} \cos bx$

▲ h) $(e^{-x} - x)^2$

▲ i) $\sqrt{x+1}\, \ln (x+1)$

▲ j) $\operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}$

▲ k) $x\, 2^{-x}$

▲ l) $\dfrac{\ln x}{x}$

▲ m) $\operatorname{sen} (\ln x)$

▲ n) $x \ln \dfrac{1}{x}$

▲ o) $(x^2 - 2x + 5)\, e^{-x}$

▲ p) $(3x^3 - 4x - 7)\, e^{-2x}$

▲ q) $x^2 \operatorname{ch} x$

▲ r) $\operatorname{arg\,th} x$

2.

■ *a) Aplicar el método de integración por partes para demostrar la igualdad:*

$$\int x^n e^x\, dx = x^{n-1} e^x - \int x^{n-2} e^x\, dx \qquad (n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2)$$

■ *b) Usar el resultado anterior para probar que:*

$$\int x^n e^x\, dx = e^x \sum_{k=0}^{n} (-1)\, \frac{n!}{(n-k)!}\, x^k$$

3.

- a) Probar que:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx - \int x.\frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx$$

- b) Integrando por partes, deducir de a) que, si $n \neq 1, n \in \mathbb{N}$:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{2n-2}\,\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx$$

- c) Calcular $\int \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx$ y $\int \frac{1}{(1+x^2)^4}\,dx$ usando b).

9.4.

EL METODO DE INTEGRACION POR FRACCIONES SIMPLES

Este método se utiliza para encontrar primitivas de funciones *racionales*, es decir, de funciones que sean cocientes de funciones polinómicas (ver parágrafo 2.3.). Una función racional cualquiera f tendrá una expresión del tipo:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Existe un procedimiento por el cual se puede expresar toda función racional f como suma de una función polinómica más una función racional, teniendo esta última la propiedad de que el grado del numerador es menor que el grado del denominador (es el conocido procedimiento de división de polinomios).

Como las funciones polinómicas son fáciles de integrar, basta estudiar el caso de funciones racionales con la mencionada propiedad: que el grado del numerador sea menor que el grado del denominador.

Recordemos que un número real d se dice *raíz* de una función polinómica f si es $f(d) = 0$. Por Proposición 2.4., d es raíz de f si y sólo si existe una función polinómica g (de un grado menos que f) tal que

$$f(x) = (x-d)\,g(x) \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \qquad (8)$$

Si d es raíz de f y g es la función polinómica que verifica (8), entonces podría ocurrir que d fuese también raíz de g, es decir, $g(d) = 0$. En ese caso existiría una tercera función polinómica h (de dos grados menos que f) tal que

$$g(x) = (x-d)\,h(x)$$

y entonces, por (8):

$$f(x) = (x-d)^2\,h(x)$$

Si esto ocurre, se dice que d es *raíz múltiple* de f (en caso contrario se dice que d es *raíz simple* de f). El *orden de multiplicidad* de una raíz d de f es aquel número natural k que tenga la siguiente propiedad: existe una función polinómica t tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$ sea:

$$f(x) = (x-d)^k . t(x)$$

y además d *no* es raíz de t (o sea, $t(d) \neq 0$). Entonces las raíces simples son las que tienen orden de multiplicidad igual a uno y las raíces múltiples son las que tienen orden de multiplicidad mayor o igual que dos.

Por ejemplo, la función polinómica $f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ tiene sólo dos raíces simples, $d = 1$ y $d = 2$, y la función polinómica $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$ tiene una raíz simple $(d = -1)$ y una raíz múltiple de orden de multiplicidad igual a dos $(d = 1)$.

Vamos a ver ahora el método de integración por fracciones simples, dividiéndolo en varios casos según la multiplicidad de las raíces del denominador. En cada caso trabajaremos sobre un ejemplo particular, pero quedará claro el método a aplicar en cualquier otro ejemplo.

1er. CASO

El denominador tiene todas sus raíces reales y simples. Por ejemplo, calculemos la integral:

$$\int \frac{2x+1}{x^3-7x+6}\,dx$$

Por simple inspección, vemos que $d = 1$ es raíz del denominador. Dividiendo $x^3 - 7x + 6$ por $x - 1$ resulta $x^2 + x - 6$ como cociente. Luego:

$$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2+x-6)$$

Es sencillo encontrar las raíces de $x^2 + x - 6$, que resultan ser $d = -3$ y $d = 2$. Luego:

$$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x+3)(x-2)$$

Entonces tenemos que calcular la integral:

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+3)(x-2)}\,dx$$

Para ello hacemos lo siguiente: tratamos de encontrar números A, B y C de modo que sea:

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2} \qquad (9)$$

Calculemos el segundo miembro:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x+3)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x-2)} =$$

$$= \frac{A(x^2+x-6) + B(x^2-3x+2) + C(x^2+2x-3)}{(x-1)(x+3)(x-2)} =$$

$$= \frac{x^2(A+B+C) + x(A-3B+2C) + (-6A+2B-3C)}{(x-1)(x+3)(x-2)}$$

Entonces, para que se cumpla (9) para todo x, debe ser:

$$A + B + C = 0$$
$$A - 3B - 2C = 2$$
$$-6A + 2B - 3C = 1$$

Este es un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas A, B y C, cuya solución resulta ser: $A = -3/4$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = 1$.

Escribimos entonces, por (9):

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+3)(x-2)} = -\frac{3/4}{x-1} - \frac{1/4}{x+3} - \frac{1}{x-2}$$

(esta es la descomposición en "fracciones simples").

Ahora es fácil calcular la integral:

$$\int \frac{2x+1}{x^3-7x+6}\,dx = -\int \frac{3/4}{x-1}\,dx -$$
$$-\int \frac{1/4}{x+3}\,dx - \int \frac{1}{x-2}\,dx =$$
$$= -\frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+3}\,dx -$$
$$-\int \frac{1}{x-2}\,dx = -\frac{3}{4}\ln|x-1| +$$
$$+\frac{1}{4}\ln|x+3| - \ln|x-2| + C$$

2do. CASO

El denominador tiene todas sus raíces reales, y algunas múltiples. Por ejemplo, calculemos la integral:

$$\int \frac{3x^3-2x^2+1}{x^4-2x^3+2x-1}\,dx$$

También en este caso, $d = 1$ es raíz del denominador. Dividiendo x^4-2x^3+2x-1 por $x-1$ resulta x^3-x^2+x-1 como cociente, es decir:

$$x^4-2x^3+2x-1 = (x-1)(x^3-x^2+x-1)$$

Pero $d = 1$ es también raíz de x^3-x^2+x-1, como se verifica de inmediato. Dividiendo esta última función por $x-1$, resulta x^2-1 como cociente. Luego:

$$x^3-x^2+x-1 = (x-1)(x^2-1),$$

y por lo tanto:

$$x^4-2x^3+2x-1 = (x-1)(x^3-x^2+x-1) =$$
$$= (x-1)(x-1)(x^2-1) =$$
$$= (x-1)^2(x^2-1) =$$
$$= (x-1)^2(x-1)(x+1) =$$
$$= (x-1)^3(x+1)$$

Reconocemos entonces que $d = 1$ es raíz múltiple del denominador (con orden de multiplicidad igual a tres) y que $d = -1$ es raíz simple.

Para calcular la integral, descomponemos al integrando en fracciones simples de la siguiente manera:

$$\frac{3x^3-2x^2+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} \quad (10)$$

(en general, si $(x-d)$ aparece elevado a la k, lo descomponemos en $\frac{A}{(x-1)^k} + \frac{B}{(x-d)^{k-1}} + \ldots$, hasta llegar a $(x-d)$ elevado a la uno, y después seguimos con los demás).

Calculemos el segundo miembro de (10):

$$\frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)^2(x+1) + D(x-1)^3}{(x-1)^3(x+1)} =$$
$$= \frac{A(x+1) + B(x^2-1) + C(x^3-x^2-x+1) + D(x^3-3x^2+3x-1)}{(x-1)^3(x+1)} =$$
$$= \frac{x^3(C+D) + x^2(B-C-3D) + x(A-C+3D) + (A-B+C-D)}{(x-1)^3(x+1)}$$

Para que se cumpla (10) para todo x, debe ser:

$$C + D = 3$$
$$B - C - 3D = -2$$
$$A - C + 3D = 0$$
$$A - B + C - D = 1$$

Este es un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas, cuya solución es:

$$A = 1,\ B = 2,\ C = \frac{5}{2},\ D = \frac{1}{2}.$$

Escribimos entonces, por (10):

$$\frac{3x^3-2x^2+1}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{5/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}$$

Ahora podemos calcular la integral:

$$\int \frac{3x^3-2x^2+1}{x^4-2x^3+2x-1}\,dx = \int \frac{3x^3-2x^2+1}{(x-1)^3(x+1)}\,dx =$$
$$= \int \frac{1}{(x-1)^3}\,dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{5/2}{x-1}\,dx +$$
$$+ \int \frac{1/2}{x+1}\,dx = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} +$$
$$+ \frac{5}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

3er. CASO

El denominador tiene raíces complejas simples.

Por ejemplo, calculemos la integral:

$$\int \frac{4x^3 - 7x^2 - 15x + 4}{x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12}\, dx$$

Es inmediato verificar que 2 y −3 son raíces del denominador (la manera de llegar a esto es otro asunto; ver la nota después del 4° caso). Dividiendo el denominador por $x - 2$ y luego dividiendo el resultado por $x + 3$, llegamos al polinomio $x^2 - 2x + 2$. Luego

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12 = (x-2)(x+3)(x^2 - 2x + 2)$$

Ahora bien, el polinomio $x^2 - 2x + 2$ no tiene raíces reales, como lo prueba el siguiente cálculo (de completación de cuadrados).

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1 \geqslant 1$$

(tiene las raíces complejas $1 + i$ y $1 - i$, aunque este hecho no nos interesará, no supondremos ningún conocimiento de números complejos).

La descomposición en fracciones simples que intentamos en este tipo de casos es la siguiente

$$\frac{2x^3 - 7x^2 - 15x + 4}{(x-2)(x+3)(x^2 - 2x + 2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 2} \qquad (11)$$

Calculamos el segundo miembro de (11):

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2} = \frac{A(x+3)(x^2-2x+2) + B(x-2)(x^2-2x+2) + (Cx+D)(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)(x^2-2x+2)} =$$

$$= \frac{A(x^3 + x^2 - 4x + 6) + B(x^3 - 4x^2 - 2x - 4) + C(x^3 + x^2 - 6x) + D(x^2 + x - 6)}{(x-2)(x+3)(x^2-2x+2)} =$$

$$= \frac{x^3(A + B + C) + x^2(A - 4B + C + D) + x(-4A - 2B - 6C + D) + (6A - 4B - 6D)}{(x-2)(x+3)(x^2-2x+2)}$$

Para que se cumpla (11) para todo x debe ser.

$$A + B + C = 4$$

$$A - 4B + C + D = -7$$

$$-4A - 2b - 6C + D = -15$$

$$6A - 4B - 6D = 4$$

Este es un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas cuya solución es:

$$A = 1,\ B = 2,\ C = 1,\ D = -1\ .$$

Escribimos entonces, por (11):

$$\frac{4x^3 - 7x^2 - 15x + 4}{(x-2)(x+3)(x^2-2x+2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+3} + \frac{x-1}{x^2-2x+2}$$

Luego la integral buscada es:

$$\int \frac{4x^3 - 7x^2 - 15x + 4}{(x-1)(x+3)(x^2-2x+2)}\, dx = \int \frac{1}{x-2}\, dx - 2\int \frac{1}{x+3}\, dx + \int \frac{x-1}{x^2-2x+2}\, dx =$$

$$= \ln|x-2| - 2\ln|x+3| + \frac{1}{2}\ln|x^2 - 2x + 2| + C$$

4to. CASO

El denominador tiene raíces complejas múltiples.

Calculemos, por ejemplo, la integral:

$$\int \frac{5x^4 + 10x^2 + 5}{x^6 - 2x^4 - 7x^2 - 4}\, dx$$

Es inmediato de verificar el que 2 y −2 son raíces del denominador.

Dividiendo por $x - 2$ y luego por $x + 2$ obtenemos $x^4 + 2x^2 + 1$ como resultado. Luego:

$$x^6 - 2x^4 - 7x^2 - 4 = (x-2)(x+2)(x^4 + 2x^2 + 1) =$$
$$= (x-1)(x+3)(x^2+1)^2$$

La función polinómica $x^2 + 1$ no tiene raíces reales (sus raíces complejas son i y −i): a diferencia del caso 3, esa expresión aparece elevada al cuadrado.

Intentamos entonces la siguiente descomposición en fracciones simples:

$$\frac{5x^4 + 10x^2 + 5}{(x-1)(x+3)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1}$$

Apelando al mismo tipo de procedimientos usado antes, llegamos a que debe ser $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 2$, $E = 0$, $F = 0$. Luego:

$$\int \frac{5x^4 + 10x^2 + 5}{(x-1)(x+3)(x^2+1)^2}\, dx = \int \frac{1}{x-2}\, dx - \int \frac{1}{x+3}\, dx + 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx =$$

(Ejercicio 3 de 9.3.)

$$= \int \frac{1}{x-2}\, dx - \int \frac{1}{x-3}\, dx + 2\left(\frac{1}{2}\ \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\, dx\right) =$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x-3| + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C$$

NOTA

El problema de encontrar las raíces de una función polinómica es insoluble en general. En los ejemplos que hemos visto, las raíces son racionales (más aún,

son enteras). Un teorema de Gauss afirma que si p/q es raíz racional de $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, y los a_i son enteros, entonces p debe dividir a a_0 y q debe dividir a a_n.

En el ejemplo dado en el caso 4, como el denominador es $x^6 - 2x^4 - 7x^2 - 4$, si p/q es raíz entonces p debe dividir a -4 (con lo cual debe ser $p = \pm 1, \pm 2, \pm 4$) y q debe dividir a 1 (con lo cual debe ser $q = \pm 1$). Luego las *posibles* raíces racionales p/q son $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Probando con cada una de ellas vemos cuáles son raíces y cuáles no: resulta que 2 y -2 son raíces y las demás no.

Este teorema nos permite, luego de la verificación para cada una de las raíces posibles, obtener *todas* las raíces *racionales*. Este método será útil para resolver algunos de los ejercicios que vienen a continuación.

EJERCICIOS

1.

Calcular las primitivas de f, siendo f (x) igual a:

★ *a)* $\dfrac{5x^3 - 2x^2 + 15}{x + 1}$

★ *b)* $\dfrac{3x^3 - 2x^2 - 1}{2x + 1}$

★ *c)* $\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$

★ *d)* $\dfrac{x + 2}{x + 10}$

★ *e)* $\dfrac{2x^3 + 3}{x^2 + 1}$

★ *f)* $\dfrac{3x^2 + 6x - 1}{x^2 + 5x + 20}$

(Sugerencia: efectuar primero la división).

2.

Calcular las primitivas de f, siendo f (x) igual a:

● a) $\dfrac{4x - 7}{x^2 - 3x + 2}$

● b) $\dfrac{6x + 10}{x^2 + 4x + 3}$

● c) $\dfrac{7x^2 - 6x + 1}{(x - 3)(x^2 - 3x + 2)}$

● d) $\dfrac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 2)^2}$

● e) $\dfrac{7x^2 + 12x + 1}{(x^2 + 4x + 4)(x - 3)}$

● f) $\dfrac{x^3 - 1}{4x^3 - x}$

● g) $\dfrac{x}{1 + x^3}$

● h) $\dfrac{x^3}{x^4 - 1}$

● i) $\dfrac{2x^3 + x^2}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)^2}$

● j) $\dfrac{3x - 1}{x^5 - x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 5x - 3}$

● k) $\dfrac{4x^3 + x^2 - 2x + 1}{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$

● l) $\dfrac{4x - 5}{x^5 + 4x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 8}$

9.5. UNAS SUSTITUCIONES UTILES

El saber como integrar funciones racionales arbitrarias (siempre y cuando resulte posible calcular las raíces del denominador) nos brinda una herramienta complementaria al método de sustitución. En efecto, hay diversos tipos de integrales que, con una sustitución adecuada, se pueden llevar a integrales de funciones racionales, las cuales se resuelven por los métodos explicados en el parágrafo previo.

Indicamos algunos de esos tipos:

1°) Funciones racionales del seno y del coseno

Entendemos por funciones racionales del seno y del coseno todas aquellas funciones que se pueden obtener como resultado de aplicar las operaciones elementales (suma, resta, producto y cociente) a las funciones seno y coseno. Por ejemplo, $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^2 x \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$ y $\dfrac{2\cos x - 1}{\cos^2 x + \operatorname{sen}^3 x \cos x}$ son funciones de este tipo y $\sqrt{2 - \cos x}$ no lo es (esto último no es fácil de probar).

Si queremos integrar funciones racionales del seno y del coseno, apelamos siempre a la misma sustitución, a saber:

$$z = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \qquad (12)$$

Como aparecerán el seno y el coseno en el integrando, entonces debemos calcularlos en función de z, es decir, en función de $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Para ello, observemos que es:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2.\frac{x}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$$

$$\cos x = \cos 2.\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = $$

$$= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$$

y por lo tanto bastará calcular $\cos\dfrac{x}{2}$ y $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$ en función de $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Pero es:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x/2}{\cos x/2} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x/2 = \frac{\operatorname{sen}^2 x/2}{\cos^2 x/2} = \frac{1 - \cos^2 x/2}{\cos^2 x/2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 1 - \cos^2\frac{x}{2} \Rightarrow \cos^2\frac{x}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} \qquad (13)$$

Pero entonces:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2}.\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}.\operatorname{tg}\frac{x}{2} =$$

$$= \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} \qquad (14)$$

Con (13) y (14) calculamos inmediatamente:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2} \qquad (15)$$

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \qquad (16)$$

Por último, al ser $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, es:

$$dz = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{1/(1+z^2)} \cdot \frac{1}{2}\, dx$$

y, por lo tanto:

$$dx = \frac{2}{1+z^2}\, dz \qquad (17)$$

Usando (15), (16) y (17), toda integral de funciones racionales del seno y del coseno se reduce a la integral de una función racional, la cual se resuelve a su vez por descomposición en fracciones simples.

Por ejemplo, calculemos la integral:

$$\int \frac{1}{3\operatorname{sen} x - 4\cos x}\, dx$$

Usando (15), (16) y (17) (y (12), desde luego), resulta:

Como las raíces de $2z^2 + 3z - 2$ son -2 y $\frac{1}{2}$, entonces escribimos:

$$\frac{2}{2z^2+3z-2} = \frac{2}{2\,(z-\frac{1}{2})(z+2)} =$$

$$= \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z+2)} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{z+2}$$

Como en el parágrafo 9.4., se calculan A y B que resultan ser:

$$A = \frac{5}{2}, \qquad B = -\frac{5}{2}$$

Entonces:

$$\int \frac{2}{2z^2+3z-2}\, dz = \int \frac{5/2}{z-\frac{1}{2}}\, dz - \int \frac{5/2}{z+2}\, dz =$$

$$= \frac{5}{2} \ln\left|z - \frac{1}{2}\right| - \frac{5}{2} \ln|z+2| + C = \quad \text{(por (12))}$$

$$= \frac{5}{2} \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right| - \frac{5}{2} \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\frac{3}{2}\operatorname{sen} x - 2\cos x}\, dx = \int \frac{1}{\frac{3}{2}\cdot\frac{2z}{1+z^2} - 2\,\frac{1-z^2}{1+z^2}} \cdot \frac{2}{1+z^2}\, dz = \int \frac{2}{3z-2+2z^2}\, dz$$

2°) Funciones racionales de $\sqrt[q]{x}$

En este tipo de funciones, es conveniente hacer la sustitución:

$$z = \sqrt[q]{x} \qquad (18)$$

Por ejemplo, si tenemos que calcular la integral:

$$\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}\, dx$$

entonces hacemos la sustitución:

$$z = \sqrt[6]{x} = x^{1/6}$$

(pues entonces $\sqrt{x} = z^3$ y $\sqrt[3]{x} = z^2$). Entonces será:

$$dz = \frac{1}{6}\, x^{-5/6}\, dz = \frac{1}{6}\, z^{-5}\, dx$$

$$\Rightarrow dx = 6z^5\, dz$$

con lo cual:

$$\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}\, dx = \int \frac{z^3 + z^2}{1+z^2} \cdot 6z^5\, dz$$

y esta integral se resuelve por descomposición en fracciones simples (haciendo primero la división).

3°) Funciones racionales de e^x

En este tipo de funciones, hacemos la sustitución:

$$z = e^x \qquad (19)$$

con lo cual:

$$dz = e^x\, dx = z\, dx$$

o sea:

$$dx = \frac{1}{z}\, dz \qquad (20)$$

Por ejemplo, para calcular la integral:

$$\int \frac{e^x - e^{3x}}{8 + e^{3x}}\, dx$$

hacemos la sustitución (19), con lo cual, por (19) y (20):

$$\int \frac{e^x - e^{3x}}{8 + e^{3x}}\, dx = \int \frac{z - z^3}{8 - z^3}\, \frac{1}{z}\, dz =$$

$$= \int \frac{1 - z^2}{8 + z^3}\, dz$$

que se resuelve por fracciones simples.

EJERCICIOS

1.

Calcular las primitivas de f, siendo f (x) igual a:

- ♦ a) $\operatorname{sen}^3 x$
- ♦ b) $\cos^2 x$
- ♦ c) $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$
- ♦ d) $\cos^3 x$
- ♦ e) $\operatorname{sen}^2 x \cos^3 x$
- ♦ f) $\operatorname{sen}^3 x \cos^2 x$
- ♦ g) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$
- ♦ h) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

♦ i) $\dfrac{1}{\cos x}$

♦ j) $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen} x}$

♦ k) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}$

♦ l) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^3 x \cos^3 x}$

♦ m) $\dfrac{1}{2+4\operatorname{sen} x}$

♦ n) $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}$

2.

Calcular las primitivas de f, *siendo* $f(x)$ *igual a:*

★ *a)* $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

★ *b)* $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}$

★ *c)* $\dfrac{1-\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}$

3.

Calcular las primitivas de f, siendo $f(x)$ igual a:

● a) $\dfrac{e^x+3e^{4x}}{1-e^{4x}}$

● b) $\dfrac{2-e^x}{e^x+e^{2x}+1}$

● c) $\dfrac{1+e^x}{e^{2x}-1}$

4.

Calcular las primitivas de f (haciendo la sustitución indicada), siendo $f(x)$ igual a:

■ a) $\operatorname{tg}^3 x \qquad (z=\operatorname{tg} x)$

■ b) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2} \qquad \left(z=\dfrac{x+1}{x}\right)$

■ c) $x^2\sqrt{1-x^2} \qquad (x=\cos z)$

■ d) $\dfrac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}} \qquad \left(x=\dfrac{1}{\cos z}\right)$

■ e) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \qquad (z=\sqrt{x^2+1})$

■ f) $\dfrac{x^2}{(\sqrt{x^2+1})^3} \qquad (x=\operatorname{sh} z)$

9.6.

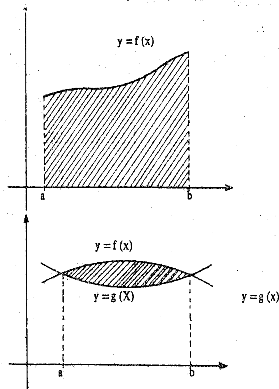
APLICACIONES GEOMETRICAS

Vamos a ver ahora algunas aplicaciones geométricas de la integral definida.

Aunque este tema podría haber sido incluído en el capítulo anterior, es conveniente verlo a esta altura, cuando ya se dispone de métodos para utilizar la regla de Barrow en una gran variedad de casos.

1°) Area entre dos curvas

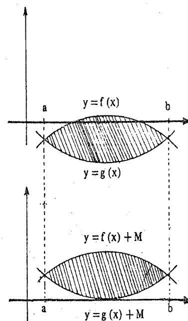
Hemos definido en el capítulo 8 la integral definida de manera que, para funciones no negativas f, $\int_a^b f(x)\,dx$ mida el área de la región del plano comprendida entre la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas verticales que cortan al eje de abscisas en $x=a$ y $x=b$.



Supongamos ahora que f y g son dos funciones no negativas cuyas gráficas se cortan solamente en los puntos correspondientes a $x=a$ y $x=b$ (ver figura), y que es $g(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces el área de la región comprendida entre ambas gráficas se puede obtener como el área de la región debajo de la gráfica de f *menos* el área de la región bajo la gráfica de g, es decir:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx \qquad (22)$$

La fórmula (22) puede aplicarse aún cuando las funciones tienen valores negativos (pero siempre que sea $g(x) \leqslant f(x)$ para $x \in [a,b]$). En efecto, sumándole un mismo número M a ambas funciones (sumándole, por ejemplo, $M=\sup\{\,|g(x)| : x\in[a,b]\}$), se puede conseguir que las funciones sean no negativas, y además el área no cambia como se puede observar en la figura. Luego el área de la región comprendida entre las gráficas de f y g está dada por:



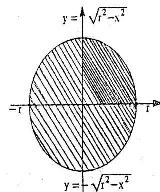
$$\int_a^b [(f(x)+M)-(g(x)+M)]\,dx =$$

$$= \int_a^b (f(x)+M-g(x)-M)\,dx = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx,$$

$$= \int_a^b (f(x)+M-g(x)-M)\,dx = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx,$$

como habíamos afirmado.

Como ejemplo, veamos que podemos calcular el área del círculo de radio **r**. Este puede verse como la región comprendida entre las gráficas de $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ y de $g(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$ (ver figura).



Entonces el área buscada será:

$$\int_{-r}^{r} (f(x)-g(x))\,dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx =$$

$$=2\int_{-r}^{r} r\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}\,dx =$$

$$=2r\int_{-r}^{r} \sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}\,dx = \text{(llamando } u=\frac{x}{r}\text{)}$$

$$=2r\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\,r\,du =$$

$$=2r^2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\,du$$

Haciendo la sustitución **u = sen t** resulta **du = cos t dt** y entonces:

$$\int \sqrt{1-u^2}\,du = \int \sqrt{1-\text{sen}^2 t}\,.\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt =$$

$$=\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2}+\frac{1}{4}\,\text{sen}\,2t =$$

$$=\frac{1}{2}\,(\text{arc sen}\,u + \frac{1}{2}\,.\,2u\,.\,\sqrt{1-u^2}\,)$$

Luego:

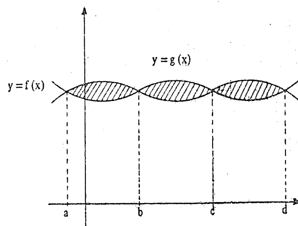
$$2r^2\int_{-1}^{1} \sqrt{2-u^2}\,du = 2r^2\,\frac{1}{2}\,(\text{arc sen}\,u + u.\sqrt{1-u^2}\,)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$=r^2\,(\text{arc sen}\,u\Big|_{-1}^{1} + u\sqrt{1-u^2}\,\Big|_{-1}^{1}\,) =$$

$$=r^2(\text{arc sen}\,1 - \text{arc sen}(-1)+0-0)=$$

$$=r^2(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})) = \pi r^2$$

que es el área del círculo de radio **r**.



Si las gráficas de las funciones se cortan en varios puntos, entonces hay que fijarse entre cada par de puntos consecutivos cuál es la mayor de las dos funciones. En el caso de la figura, el área de la región rayada es:

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx + \int_b^c (g(x)-f(x))\,dx +$$

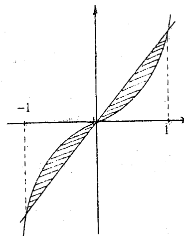
$$+\int_c^d (f(x)-g(x))\,dx$$

Por ejemplo, consideremos las funciones **f** y **g** dadas por:

$$f(x)=x^3 \quad , \quad g(x)=x$$

Los puntos de intersección corresponden a los **x** para los cuales sea $f(x)=g(x)$, es decir:

$$x^3 = x$$



o sea:

$$x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0,\,1 \text{ ó } -1$$

Entre -1 y 0 es $g(x) \leqslant f(x)$ y entre 0 y 1 es $f(x) \leqslant g(x)$. Luego el área de la región rayada es igual a:

$$\int_{-1}^{0} (f(x)-g(x))\,dx + \int_0^1 (g(x)-f(x))\,dx =$$

$$=\int_{-1}^{0} (x^3-x)\,dx + \int_0^1 (x-x^3)\,dx =$$

$$=(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2})\Big|_{-1}^{0} + (\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4})\Big|_0^1 =$$

$$=(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

EJERCICIOS

1.

Calcular el área de la región encerrada por la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2.

Calcular el área de la región limitada por las siguientes curvas:

- ★ *a)* $y=x^3-x,\; y=2x$
- ★ *b)* $y=x^2-1,\; y=x$
- ★ *c)* $y=x^2,\; y=x+2,\; y=-x^2+2x+8,\; y=0$
- ★ *d)* $y=e^x,\; y=e^{-x},\; x=1,\; x=-1$
- ★ *e)* $y=x^2-4,\; y=-x^2+4,\; y=-x$

3.

Calcular el área del triángulo de vértices $(-1,-2)$, $(1,-1)$, $(0,3)$.

4.

Calcular el área de las dos partes en que $y^2 = 2x$ divide a $x^2 + y^2 = 8$.

2°) Longitud de arco

Antes de dar la fórmula para calcular la longitud de un arco de curva, vamos a demostrar un lema auxiliar. Este lema dice que, para funciones continuas, la recíproca del Ejercicio 3 del parágrafo 8.1. es verdadera.

LEMA 9.2.

****

Sea f continua en $[a, b]$ y, para cada $n \in N$, sea $\pi_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ la partición de $[a, b]$ definida por:

$$t_i = a + i\,\frac{b-a}{n} \qquad (0 \leqslant i \leqslant n)$$

(o sea, π_n es dividir $[a, b]$ en n intervalos de igual longitud).

Entonces existen $\lim\limits_{n\to\infty} s_{\pi_n}(f)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} S_{\pi_n}(f)$

y además:

$$\lim_{n\to\infty} s_{\pi_n}(f) = \lim_{n\to\infty} S_{\pi_n}(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

****

Demostración

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Como f es uniformemente continua en $[a, b]$ por el Teorema de Heine-Cantor (Teorema 6.31.), entonces existe $\delta > 0$ tal que vale la siguiente implicación:

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

para $x, x' \in [a, b]$.

Sea $n_0 \in N$ tal que $\dfrac{b-a}{n_0} < \delta$. Entonces para $n \geqslant n_0$ es también $\dfrac{b-a}{n} < \delta$, con lo cual es $|x - x'| < \delta$ para $x \in [t_{i-1}, t_i]$ (donde $t_i = a + i\,\dfrac{b-a}{n}$).

Luego, para $x, x' \in [t_{i-1}, t_i]$, es:

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

Si $M_i = \sup\{f(x) \colon x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ y $m_i = \inf\{f(x) \colon x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ entonces será $M_i = f(c_i)$ y $m_i = f(d_i)$ para ciertos c_i y d_i en $[t_{i-1}, t_i]$ (Teorema 6.26.). Luego:

$$M_i - m_i = |M_i - m_i| = |f(c_i) - f(d_i)| < \frac{\epsilon}{b-a} \qquad (23)$$

y esta desigualdad vale para todo i entre 1 y n.

Con esto, resulta:

$$S_{\pi_n}(f) - s_{\pi_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) <$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a}\,(t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a} \cdot \frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{n} = \epsilon$$

Luego $0 \leqslant S_{\pi_n}(f) - s_{\pi_n}(f) < \epsilon$ para $n \geqslant n_0$. Más aún:

$$\epsilon > S_{\pi_n}(f) - s_{\pi_n}(f) = \Big(S_{\pi_n}(f) - \int_a^b f(x)\,dx\Big) + \Big(\int_a^b f(x)\,dx - s_{\pi_n}(f)\Big)$$

y como los dos paréntesis son no negativos, entonces debe ser:

$$0 \leqslant S_{\pi_n}(f) - \int_a^b f(x)\,dx < \epsilon$$

y:

$$0 \leqslant \int_a^b f(x)\,dx - s_{\pi_n}(f) < \epsilon$$

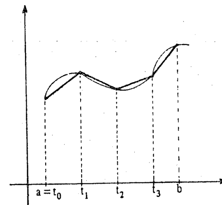
para $n \geqslant n_0$. Siendo $\epsilon > 0$ arbitrario, queda probado el lema.///

Pasemos al objeto de este apartado. Si f es una función, con derivada f' continua, queremos calcular la longitud de la curva obtenida haciendo la representación gráfica de f entre ciertos valores $x = a$ y $x = b$.

Para ello, consideramos la partición del lema 9.2., es decir:

$$\pi_n = \Big\{a,\ a + \frac{b-a}{n},\ a + 2 \cdot \frac{b-a}{n},\ \ldots,\ a + (n-1)\,\frac{b-a}{n},\ b\Big\}$$

para cada i entre 1 y n trazamos el segmento que une los puntos de coordenadas $(t_{i-1}, f(t_{i-1}))$ y $(t_i, f(t_i))$ (ver figura). De esta manera tenemos una poligonal cuya longitud es aproximadamente la de la curva.



Calculemos la longitud de esta poligonal. El segmento que une $(t_{i-1}, f(t_{i-1}))$ y $(t_i, f(t_i))$ tiene longitud:

$$\sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2} = \quad \text{(Teorema 7.9. del valor Medio)}$$

$$= \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + f'(c_i)^2 (t_i - t_{i-1})^2} = \quad (\text{pues } c_i \in (t_{i-1}, t_i))$$

$$= (t_i - t_{i-1})\,\sqrt{1 + f'(c_i)^2}$$

Luego la longitud de la poligonal construida es igual a:

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})\,\sqrt{1 + f'(c_i)^2}$$

Sea g la función definida por:

$$g(x)=\sqrt{1+f'(x)^2}$$

Si $M_i=\sup\{g(x): x\in[t_{i-1},t_i]\}$ y $m_i=\inf\{g(x): x\in[t_{i-1},t_i]\}$, entonces claramente:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i-t_{i-1})\leqslant \sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\sqrt{1+f'(c_i)^2}\leqslant$$

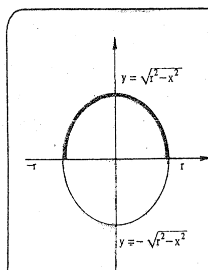
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i-t_{i-1})$$

o sea:

$$s_{\pi_n}(g)\leqslant \sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\sqrt{1+f'(c_i)^2}\leqslant S_{\pi_n}(g) \qquad (24)$$

Cuando $n\to\infty$, parece claro que la longitud de la poligonal construida tiende a la longitud de la gráfica de f entre $x=a$ y $x=b$.

Sea o no claro, aceptamos este hecho. Como el primer y tercer miembro de (24) tienden a $\int_a^b g(x)\,dx$



por el lema 9.2., resulta entonces que la longitud buscada, digamos $L_b^a(f)$, tiene la siguiente expresión:

$$L_b^a(f)=\int_a^b g(x)\,dx=$$

$$=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \qquad (25)$$

Como chequeo de la fórmula (25), calculemos la longitud de la circunferencia de radio r. Evidentemente debe ser el doble de la longitud de la semicircunferencia superior; entonces tomamos $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ con lo cual es:

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\Rightarrow\sqrt{1+f'(x)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}=\sqrt{\frac{1}{1-(x/r)^2}}$$

Entonces:

$$2L_b^a(f)=2\int_{-r}^{r}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=2\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}}\,dx= \qquad (u=\frac{x}{r})$$

$$=2\int_{-1}^{1}\frac{r}{\sqrt{1-u^2}}\,du=2r\,(\text{arc sen } u)\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=2r\,(\text{arc sen } 1-\text{arc sen }(-1))=$$

$$=2r\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2r\,.\,\pi=2\pi r,$$

como era de esperar.

EJERCICIOS

1.

- a) Calcular la longitud de la curva $y=-2x^2+x-1$ desde $x=1$ hasta $x=2$.
- b) Calcular la longitud de la catenaria $y=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ desde el vértice $(0,a)$ hasta el punto (b,h).
- c) Calcular la longitud del arco de la curva $y=e^x$ comprendido entre $A=(0,1)$ y $B=(1,e)$.

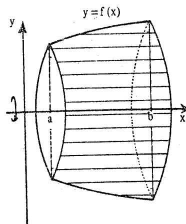
2.

Hallar la longitud de la astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ $(a>0)$.

3.

Mostrar que la curva $y=x\,\text{sen}\,\frac{\pi}{x}$ tiene longitud infinita en $(-\epsilon,\epsilon)$ cualquiera sea $\epsilon>0$. (SUGERENCIA: hacer un dibujo y *no* usar (25)).

3º) Area y volumen de un sólido de revolución

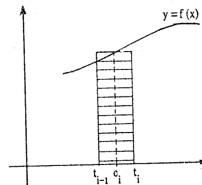


Consideremos una función f positiva en un cierto intervalo $[a,b]$.

Si hacemos rotar la gráfica de f alrededor del eje de abscisas haciéndole dar una vuelta completa, obtenemos una cierta superficie que encierra un cierto sólido. Queremos calcular el área de la mencionada superficie y el volumen del resultante sólido.

Para calcular el volumen, apelamos a la partición π_n del lema 9.2. y en cada intervalito $[t_{i-1},t_i]$ elegimos un número cualquiera c_i. Si ahora hacemos rotar alrededor del eje de abscisas el rectángulo de base t_i-t_{i-1} y altura $f(c_i)$, obtenemos un cilindro de base un círculo de radio $f(c_i)$ y de altura t_i-t_{i-1}. Su volumen será por tanto:

superficie base X altura $=\pi\,.\,f(c_i)^2\,(t_i-t_{i-1})$



La suma de todos esos volúmenes dará una aproximación del volumen buscado:

$$\sum_{i=1}^{n}\pi\,f(c_i)^2\,(t_i-t_{i-1})$$

Llamando $g(x)=\pi\,.\,f(x)^2$, resulta entonces:

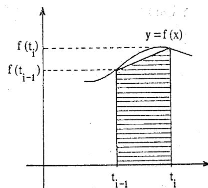
$$s_{\pi_n}(g)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\pi\,.\,f(c_i)^2\,(t_i-t_{i-1})\leqslant S_{\pi_n}(g)$$

Parece claro que el miembro del medio tiende al volumen buscado cuando $n \to \infty$. Aceptando eso, como los extremos tienden a $\int_a^b g(x)\,dx$ (por el lema 9.2.), entonces el volumen buscado resulta ser:

$$V = \int_a^b g(x)\,dx = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx \qquad (26)$$

En cuanto al área, en lugar de tomar los rectangulitos de altura $f(c_i)$, lo que hacemos es tomar el segmento que une $(t_{i-1}, f(t_{i-1}))$ con $(t_i, f(t_i))$ y hacemos rotar la figura resultante. El resultado es un tronco de cono de radios $f(t_{i-1})$ y $f(t_i)$ y de arista:

$$\ell = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2}$$



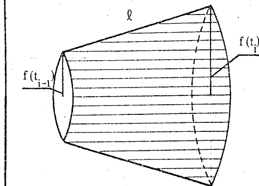
Es sabido de la geometría elemental que el área de dicho tronco de cono está dada por:

$$\pi\,(f(t_{i-1}) + f(t_i))\,.\,\ell$$

o sea:

$$\pi(f(t_{i-1})+f(t_i))\sqrt{(t_i-t_{i-1})^2+(f(t_i)-f(t_{i-1}))^2} = \quad \text{(Teorema 7.9.)}$$

$$= \pi(f(t_{i-1})+f(t_i))(t_i-t_{i-1})\sqrt{1+f'(c_i)^2} \quad (c_i \in (t_{i-1}, t_i))$$



Si sumamos entre 1 y n obtenemos una aproximación del área del sólido de revolución:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi\,(f(t_{i-1}) + f(t_i))\,\sqrt{1+f'(c_i)^2}\,(t_i - t_{i-1}) \qquad (29)$$

Si en lugar de (29), consideramos:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi\,.\,2\,f(c_i)\,\sqrt{1+f'(c_i)^2}\,(t_i - t_{i-1}), \qquad (30)$$

afirmamos que el límite de (30) cuando $n \to \infty$ es igual

al límite de (29) cuando $n \to \infty$. En efecto, su diferencia es, en módulo:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \pi\,(2f(c_i) - f(t_i) - f(t_{i-1}))\,\sqrt{1+f'(c_i)^2}\,(t_i - t_{i-1})\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} \pi\,(f(c_i) - f(t_i) + f(c_i) - f(t_{i-1}))\,\sqrt{1+f'(c_i)^2}\,(t_i - t_{i-1})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \pi \sum_{i=1}^{n} (\,|f(c_i) - f(t_i)| + |f(c_i) - f(t_{i-1})|\,)\,\sqrt{1+f'(c_i)^2}\,(t_i - t_{i-1}) = (*)$$

Como f es continua en $[a, b]$, es uniformemente continua en $[a, b]$ (Teorema 6.31. de Heine-Cantor). Luego dado $\epsilon > 0$ debe existir $\delta > 0$ tal que, si $|x - x'| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x')| < \dfrac{\epsilon}{2M(b-a)\pi}$ $(M = \max\{\sqrt{1+f'(x)^2} : x \in [a, b]\})$.

Tomando n_0 tal que $\dfrac{b-a}{n_0} < \delta$, entonces, para $n \geqslant n_0$, cada intervalito $[t_{i-1}, t_i]$ tiene longitud menor que δ. Luego, en particular:

$$|f(c_i) - f(t_i)| + |f(c_i) - f(t_{i-1})| <$$

$$< \frac{\epsilon}{2M(b-a)\pi} + \frac{\epsilon}{2M(b-a)\pi} = \frac{\epsilon}{M(b-a)\pi}$$

Entonces:

$$(*) < \pi \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{M(b-a)\pi}\,\sqrt{1+f'(c_i)^2}\,(t_i - t_{i-1}) <$$

$$< \pi\,\frac{\epsilon}{M(b-a)\pi} \sum_{i=1}^{n} M\,(t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \frac{\epsilon}{b-a}\,.\,(b-a) = \epsilon$$

Como esto se puede conseguir para todo $\epsilon > 0$, se deduce lo afirmado.

Aceptando que (29) tiende al área buscada, entonces, por lo que vimos recién, también (30) tiende al área buscada. Pero, si llamamos:

$$g(x) = 2\pi\,f(x)\,\sqrt{1+f'(x)^2}\,,$$

entonces es claro que

$$s_{\pi_n}(g) \leqslant 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\sqrt{1+f'(c_i)^2}\,(t_i - t_{i-1}) \leqslant S_{\pi_n}(g) \quad (31)$$

para todo $n \in N$. Como el primer y tercer miembros de (31) tienden a $\int_a^b g(x)\,dx$ (por Lema 9.2.), entonces el área buscada es:

$$A = \int_a^b g(x)\,dx = 2\pi \int_a^b f(x)\,\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \qquad (32)$$

EJERCICIOS

1.

Calcular el volumen y el área de una esfera de radio r.

2.

Calcular volumen y área del paraboloide engendrada por $y^2 = 2\,p\,x$, $0 \leqslant x \leqslant a$.

3.

Hallar el volumen limitado por el paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$$

y el plano $z = z_0$.

4.

Hallar el volumen del sólido determinado por la rotación de la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ *alrededor del eje* x, $0 \leqslant x \leqslant a$.

CAPITULO X

Convergencia Uniforme y Series de Potencias

1. Convergencia uniforme.
2. Propiedades de la convergencia uniforme.
3. Series de funciones.
4. Series de potencias.
5. La función de Weierstrass.
6. Series de Taylor.

10.1. CONVERGENCIA UNIFORME

En el Capítulo 3 hemos considerado sucesiones de números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ (es decir, cada a_n es un número real), hemos definido la noción de límite de una tal sucesión y hemos estudiado sus propiedades.

Vamos a enfrentar ahora una situación análoga, pero no igual; vamos a considerar sucesiones $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, pero donde cada f_n no es un número real sino una *función*. Es decir, consideraremos una *sucesión de funciones* definidas todas en un mismo subconjunto A de $\mathbf{R}$ y a valores en $\mathbf{R}$.

Como ejemplo, tenemos la sucesión $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, donde

$$f_n(x) = x^n$$

(aquí es $A = \mathbf{R}$, ya que cada f_n está definida sobre todo $\mathbf{R}$).

Si $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, es una sucesión de funciones definidas sobre $A \subset \mathbf{R}$, entonces para cada $x \in A$, la sucesión:

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

es una sucesión *numérica*, es decir, una sucesión de números reales de las que ya hemos estudiado en el Capítulo 3.

Este hecho nos permite dar un concepto de límite de sucesiones de funciones que se reduce al concepto de límite estudiado allí:

DEFINICION 10.1.

Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones definidas en $A \subset R$.

Definimos que esta sucesión *converge puntualmente en* A a una cierta función $f: A \to R$ si, para cada $x \in A$ se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Escribiremos $f_n \to f$ para indicar que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a la función f.

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

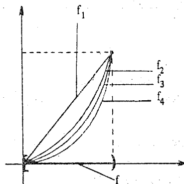
EJEMPLOS

1.

Consideremos la sucesión $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, vista antes, es decir:

$$f_n(x) = x^n$$

y tomemos $A = [0, 1]$. Si $0 \leq x < 1$, entonces $f_n(x) = x^n$ tiende a cero según vimos en 3.4.; si $x = 1$, entonces $f_n(1) = 1^n = 1$ para todo $n \in N$, luego $f_n(1) \to 1$. En definitiva, f_n converge puntualmente a la siguiente función $f: [0, 1] \to R$:



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

2.

Consideremos la función $(f_n)_{n\geq 1}$ definida por:

$$f_n(x) = \frac{2\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x+1}}$$

y tomemos $A = [0, +\infty)$. Si $x > 0$, entonces $\sqrt[n]{x} \to 1$ según vimos en 3.4., luego $f_n(x) \to \frac{2}{1+1} = 1$. En cambio si $x = 0$ es $f_n(0) = \frac{2.0}{0+1} = 0$ para todo $n \in N$, luego $f_n(0) \to 0$. En definitiva, $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a la misma función f del ejemplo anterior.

3.

Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ la sucesión de funciones definida por:

$$f_n(x) = \cos n\pi x$$

y sea $A = R$. Si $x = 1$, por ejemplo, es $f_n(1) = \cos n\pi 1 = \cos n\pi = (-1)^n$. Luego $f_n(1)$ *no* tiene límite. Entonces f_n no converge puntualmente a ninguna función.

Si en lugar de $A = R$ hubiéramos tomado A como el conjunto de los enteros pares, entonces f_n convergería puntualmente a la función constantemente uno. Luego la existencia o no de convergencia puntual depende de cuál sea el conjunto A considerado.

Vamos ahora a definir otro concepto de convergencia de funciones, el de convergencia uniforme:

DEFINICION 10.2.

Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones definidas en un cierto $A \subset R$. Decimos que la sucesión converge *uniformemente en* A a una función f si se verifica la siguiente condición:

"Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in N$ tal que, si $x \in A$ y $n \geq n_0$, entonces

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon" \qquad (1)$$

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

OBSERVACION

A primera vista, no se entiende la diferencia entre la definición 10.2. y la 10.1. Porque que se pueda conseguir que $f_n(x)$ difiera de $f(x)$ en menos de ϵ (en módulo) con tal que sea $n \geq n_0$ quiere decir que $f_n(x)$ converge a $f(x)$ en el sentido del Capítulo 3, y eso es la convergencia puntual.

Hay sin embargo una diferencia muy importante entre 10.1. y 10.2. Que se cumpla 10.1. se puede escribir de la siguiente forma:

"Para cada $x \in A$ es cierto que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in N$ tal que, si $n \geq n_0$, entonces

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon" \qquad (2)$$

Ahora estamos en condiciones de ver la diferencia: fijado el $\epsilon > 0$, el $n_0 \in N$ que podemos conseguir según (2), *depende, en principio,* de x. Es decir, será $n_0 = n_0(\epsilon, x)$. En cambio, en (1), el n_0 que se puede conseguir *es el mismo para todos los* x *de* A, *sólo depende de* ϵ.

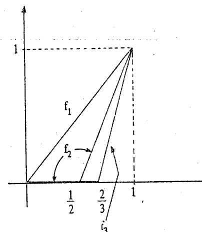
Algunos ejemplos aclararán más la noción de convergencia uniforme y su diferencia con la noción de convergencia puntual.

EJEMPLO 1

Sea $A = [0, 1]$ y $(f_n)_{n\geq 1}$ la sucesión de funciones definidas por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ nx + 1 - n & \text{si} \quad 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Si $0 \leq x < 1$, sea $n_0 \in N$ tal que $1 - \frac{1}{n_0} \geq x$; entonces $f_n(x) = 0$ para $n \in n_0$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. En cambio, si $x = 1$ es $f_n(x) = 1$ para todo $n \in N$, luego $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$.



En definitiva, $(f_n)_{n\geq 1}$ converge *puntualmente* a la funcion $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

No es cierto, en cambio, que f_n converja uniformemente a f en $[0, 1]$.

En efecto, tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$ y cualquier n_0, entonces si $x = 1 - \frac{1}{2n_0}$:

$$|f(x) - f_{n_0}(x)| = |0 - f(1 - \frac{1}{2n_0})| =$$

$$= |f(1 - \frac{1}{2n_0})| =$$

$$= |n_0(1 - \frac{1}{2n_0}) + 1 - n_0| =$$

$$= |n_0 - \frac{1}{2} + 1 - n_0| =$$

$$= \frac{1}{2}$$

Luego no existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, sea $|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2}$ cualquiera sea $x \in [0, 1]$. Con lo cual f_n *no* converge uniformemente a f.

EJEMPLO 2

Sea $A = \mathbb{R}$ y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ la sucesión definida por:

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \text{ sen } nx$$

Es fácil ver que f_n converge puntualmente a la función nula. Pero además converge uniformemente. En efecto, es:

$$|f_n(x) - 0| = |\frac{1}{n^2} \text{ sen } nx - 0| =$$

$$= \frac{1}{n^2} |\text{sen } nx| \leq \frac{1}{n^2} \cdot 1 = \frac{1}{n^2}$$

y entonces basta tomar $n_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ para que se verifique, para $n \geq n_0$, $|f_n(x) - 0| < \epsilon$ *cualquiera sea* $x \in \mathbb{R}$. Aquí se ve que el n_0 depende sólo de ϵ y no del punto x.

EJERCICIOS

1.

Decir a qué función converge puntualmente la sucesión dada por:

- a) $f_n(x) = x^n$, $A = (-1, 1]$
- b) $f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$, $A = \mathbb{R}$
- c) $f_n(x) = n^2 x (1 - x^2)^n$, $A = [0, 1]$
- d) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$, $A = \mathbb{R}$
- e) $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq n \\ \frac{x - n}{n} & \text{si} \quad x > n \end{cases}$
- f) $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}$, $A = (1, +\infty)$

2.

Probar que si f_n *converge uniformemente en* A *a* f, *entonces* f_n *converge puntualmente en* A *a* f.

3.

Probar que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente en A pero no uniformemente, siendo:

★ a) $A = [0, 1]$, $f_n(x) = \begin{cases} -nx + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$

★ b) $A = [0, 2]$, $f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 - \frac{1}{n} \\ nx + 1 - 2n & \text{si} \quad 2 - \frac{1}{n} < x \leq 2 \end{cases}$

★ c) $A = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$

★ d) $A = (1, +\infty)$, $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}$

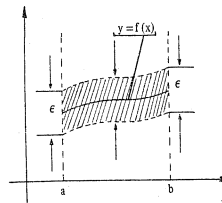
10.2. PROPIEDADES DE LA CONVERGENCIA UNIFORME

Consideremos el caso en que $A = [a, b]$. La primera propiedad de las sucesiones uniformemente convergentes que vamos a ver es bastante intuitiva si uno se atiene a la interpretación geométrica de la uniformidad de la convergencia de una sucesión de funciones en un intervalo cerrado $[a, b]$. Veamos en qué consiste esta interpretación.

Si f_n converge uniformemente a f en $[a, b]$, entonces dado $\epsilon > 0$ debe existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$:

$$f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon \quad (\text{para } n \geq n_0)$$

Esto significa, en la figura que, para $n \geq n_0$, la representación gráfica de f_n debe estar incluida en la zona rayada.



Recordando que la integral de una función mide al área debajo de su gráfica, entonces se intuye que la integral de f_n debe acercarse a la integral de f. Esto es efectivamente así:

PROPOSICION 10.3.

Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones integrables sobre $[a, b]$ que converge uniformemente a una función f integrable sobre $[a, b]$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

Demostración

Dado $\epsilon > 0$, como $\frac{\epsilon}{b-a}$ también es mayor que 0, entonces por (2) existe $n_0 \in N$ tal que, para $n \geqslant n_0$, es $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$, *cualquiera sea* $x \in [a, b]$.

Entonces, si $n \geqslant n_0$, es:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx\right| =$$

$$= \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\, dx\right| \leqslant \quad \text{(Ejercicio de 8)}$$

$$\leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx <$$

$$< \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\, dx = \frac{\epsilon}{b-a} \int_a^b 1\, .\, dx =$$

$$= \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \epsilon$$

Como esto se puede hacer para todo $\epsilon > 0$, se deduce la verdad de lo afirmado.///

PROPOSICION 10.4.

Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas en (a, b) y suponemos que f_n converge uniformemente en (a, b) a una función f. Entonces f es continua en (a, b)

■ ■

Demostración

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Como f_n converge uniformemente a f en (a, b) entonces existe $n_0 \in N$ tal que, si $n \geqslant n_0$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{para todo } x \in (a, b)$$

Sea $x_0 \in (a, b)$; como f_{n_0} es continua en x_0, entonces existe $\delta > 0$ tal que, si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$.

Entonces para $|x - x_0| < \delta$ será:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| <$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Siendo $\epsilon > 0$ arbitrario, se deduce lo afirmado.///

Podemos expresar la Proposición 10.4. de la siguiente manera: el límite uniforme de funciones continuas es una función continua.

Si el límite no es uniforme (o sea, si solamente hay convergencia puntual), aunque todas las f_n sean continuas, su límite puntual f puede no serlo. Por ejemplo, consideremos $f_n : (-1, 1) \to R$ definida por $f_n(x) = (1 - x^2)^n$; cada f_n es continua, pero su límite (puntual) es la función f que vale 0 si $x \neq 0$ y 1 en $x = 0$; luego el límite no es una función continua.

Veamos ahora qué pasa con el límite de las derivadas.

PROPOSICION 10.5.

Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones de derivada continua en (a, b) que converge puntualmente a una función f, y si $(f'_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a una función continua f, entonces f es derivable en (a, b) y $f' = g$.

En particular:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

■ ■

Demostración

Sea $x_0 \in (a, b)$ y sea $G: (a, b) \to R$ la función definida por:

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$$

Como $(f'_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a g en $[x_0, x]$ (o $[x, x_0]$), entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt\, ,$$

o sea, por la regla de Barrow:

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt,$$

de donde:

$$f(x) - f(x_0) = G(x),$$

o sea:

$$f(x) = G(x) + f(x_0) \tag{3}$$

Por Teorema 8.20., G es derivable en (a, b) y $G'(x) = g(x)$.

Luego, por (3), f es derivable en (a, b) y además:

$$f'(x) = G'(x) + 0 = g(x)$$

lo cual prueba la Proposición.///

EJERCICIOS

1.

Probar que $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge puntualmente en* $[0, 1]$ *pero no uniformemente (usando 10.3. ó 10.4.), siendo:*

▲ *a)* $f_n(x) = n^2 x (1 - x^2)^n$

▲ *b)* $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \\ n x^2 & si \quad 0 \leqslant x < \frac{1}{n} \end{cases}$

▲ c) $f_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \\ 2n(1-nx) & si \quad 0 \leqslant x < \frac{1}{n} \end{cases}$

▲ d) $f_n(x) = 2n\,x\,e^{-nx^2}$

2.

Estudiar la convergencia en $\mathbb{R}$ de $(f_n)_{n \geqslant 1}$, siendo:

◆ a) $f_n(x) = \frac{\text{sen}\, nx}{n}$

◆ b) $f_n(x) = \frac{x}{1+n\,x^2}$

◆ c) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{x-n}{n} & si \quad x > n \\ 0 & si \quad x \leqslant n \end{cases}$

10.3. SERIES DE FUNCIONES

Sea $(f_k)_{k \geqslant 1}$ una sucesión de funciones definidas en $A \subset \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in A$ podemos formar la suma parcial:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

Esto nos da una nueva sucesión de funciones $(S_n)_{n \geqslant 1}$, definidas también en A. Si esta sucesión tiene

límite (puntual) S, indicamos:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

Tenga o no límite $(S_n)_{n \geqslant 1}$, llamaremos ***serie*** $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ a la sucesión $(S_n)_{n \geqslant 1}$ de sumas parciales. Si esta sucesión tiene límite (puntual) S, diremos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ ***converge*** a la función S.

De esta manera, la convergencia de una ***serie*** de funciones se reduce a la convergencia de una ***sucesión*** de funciones (la de las sumas parciales).

De acuerdo a eso, diremos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ ***converge uniformemente en*** A a una función S si la sucesión $(S_n)_{n \geqslant 1}$ de sumas parciales converge uniformemente en A a la función S (en el sentido de la definición 10.2.).

Las Proposiciones 10.3., 10.4. y 10.5. tienen inmediatas consecuencias para series de funciones. Demostramos dos de ellas y la restante quedará como ejercicio (Ver el ejercicio de este parágrafo).

PROPOSICION 10.6.

Sea $(f_k)_{k \geqslant 1}$ una sucesión de funciones integrables sobre $[a, b]$ y supongamos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente en $[a, b]$ a una función S integrable sobre $[a, b]$. Entonces

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx,$$

o sea:

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$$

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración

Sea:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

Entonces, por la Proposición 8.11. (más un razonamiento inductivo) S_n es integrable sobre $[a, b]$ para todo n y además:

$$\int_a^b S_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx$$

Como $(S_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformemente a S, entonces, por Proposición 10.3.:

$$\int_a^b S(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx \;///$$

PROPOSICION 10.7.

Sea $(f_n)_{n \geqslant 1}$ una sucesión de funciones continuas en (a, b) y supongamos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente en (a, b) a una función S. Entonces S es continua en (a, b).

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración

Sea:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

Entonces, por la Proposición 6.22. (más un razonamiento inductivo), S_n es continua en (a, b) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $(S_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformemente a S, entonces, por la Proposición 10.4., S es continua en (a, b).

EJERCICIO

Sea $(f_n)_{n \geqslant 1}$ una sucesión de funciones derivable en (a, b) tal que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge puntualmente en (a, b) a una función S. Si además la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k$ converge uniformemente a una función h continua en (a, b), entonces S es derivable y $S' = h$. En particular:

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

o sea,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

(SUGERENCIA: usar 7.3. y 10.5.).

10.4. SERIES DE POTENCIAS

Ahora vamos a considerar un caso particular de series de funciones: aquel en que cada f_n es de la forma $f_n(x) = a_n x^n$ para un cierto número real a_n.

Es decir, vamos a considerar series del siguiente tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Estas series se denominan, por razones obvias, *series de potencias* y tienen importantes propiedades y aplicaciones, algunas de las cuales serán estudiadas en este capítulo.

Desde luego, el primer problema a estudiar es el de la convergencia de una tal serie. Para ello será útil el siguiente resultado general:

PROPOSICION 10.8.

Sea $(f_k)_{k \geq 0}$ una sucesión de funciones definidas sobre un conjunto $A \subset R$ y supongamos que existe una sucesión numérica $(r_k)_{k \geq 0}$ que verifique:

- 1. $|f_k(x)| \leqslant r_k$ para todo $x \in A$ y para todo k.
- 2. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} r_k$ es convergente.

Entonces para todo $x \in A$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge absolutamente. Más aún, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente en A a la función f definida por:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \qquad (x \in A)$$

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración

Que $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converja absolutamente significa que $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|$ converja. Pero eso es inmediato a partir de 1), 2) y el criterio de comparación (Proposición 4.3.).

Para probar la segunda afirmación, sea $\epsilon > 0$ y sea $n_0 \in N$ tal que $\sum_{k=0}^{\infty} r_k - \sum_{k=0}^{n} r_k < \epsilon$ si $n \geqslant n_0$. Pero:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k - \sum_{k=0}^{n} r_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k \qquad (4)$$

En efecto, es:

$$\sum_{k=0}^{n} r_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k = \sum_{k=0}^{n} r_k + \lim_{m \to \infty} \sum_{k=n+1}^{m} r_k =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{n} r_k + \sum_{k=n+1}^{m} r_k \right) =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} r_k = \sum_{k=0}^{\infty} r_k$$

de donde se deduce (4).

Entonces resulta, para $n \geqslant n_0$ y para todo $x \in A$:

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)| = |\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)| = \quad \text{(Como en (4))}$$

$$= |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| = |\lim_{m \to \infty} \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)| =$$

$$\text{(Ejercicio 2 de 3.1.)} = \lim_{m \to \infty} |\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{m \to \infty} \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leqslant \quad \text{(por 1))}$$

$$\leqslant \lim_{m \to \infty} \sum_{k=n+1}^{m} r_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k = \quad \text{(por (4))}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} r_k - \sum_{k=0}^{n} r_k < \epsilon,$$

lo que demuestra lo afirmado.///

Ahora podemos probar el resultado clave sobre series de potencias:

LEMA 10.9.

(LEMA DE ABEL)

****

Sea x_0 un número real distinto de cero tal que la serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x_0^k$$

sea convergente. Entonces, cualquiera sea r con $0 < r < |x_0|$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge absoluta y uniformemente en $A = [-r, r]$.

****

Demostración

Sea $x \in [-r, r]$; entonces $|x| \leqslant r$. Por lo tanto:

$$|a_k x^k| = |a_k| |x^k| = |a_k| . |x|^k \leqslant$$

$$\leqslant |a_k| . r^k = |a_k| . \frac{r^k}{|x_0|^k} . |x_0|^k =$$

$$= |a_k x_0^k| . |\frac{r}{x_0}|^k \qquad (5)$$

Como $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ converge, entonces el término general tiende a cero (Proposición 4.2.). En particular, $(a_k x_0^k)_{k \geq 0}$ es convergente, así que debe ser acotada (Proposición 3.4.). Es decir, existe un número $M > 0$ tal que, para todo $k \geqslant 0$:

$$|a_k x_0^k| \leqslant M$$

Entonces, por (5):

$$|a_k x^k| \leqslant M . |\frac{r}{x_0}|^k = M . c^k$$

Como $|c| = |\frac{r}{x_0}| = \frac{|r|}{|x_0|} = \frac{r}{|x_0|} < 1$, entonces la serie $\sum_{k=0}^{\infty} M . c^k$ converge. Luego, la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ está en las condiciones de la Proposición 10.8. con $r_k = M . c^k$, $A = [-r, r]$, de lo que se deduce el Lema.///

Es importante notar que, para una serie de potencias dada, puede no existir un x_0 distinto de cero tal que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ sea convergente. Por ejemplo, si consideramos la serie de potencias:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k! \, x^k$$

entonces, cualquiera sea $x_0 \neq 0$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k! \, x_0^k$ no es convergente (aplicar ejercicio 8 de 3.4. para ver que el término general no tiende a cero).

Lo que sí es cierto siempre es que, para $x = 0$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ es convergente (evidente). La situación general es la siguiente:

TEOREMA 10.10.

Sea $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ una serie de potencias y sea: $R = \sup\{r : r \geqslant 0$ y la serie converge en $[-r, r]\}$ (eventualmente puede ser $R = +\infty$).

Entonces se verifica:

♦ 1. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge absolutamente para todo x tal que $|x| < R$.

♦ 2. Para todo r tal que $0 \leqslant r < R$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge uniformemente en $[-r, r]$.

♦ 3. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *no* converge para ningún x_0 que verifique $|x_0| > R$.

Demostración

Si $|x| < R$, sea r_0 un número real tal que $|x| < r_0 < R$ y tal que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r_0^k$ converja (existe por propiedad S_2' del supremo, ver Proposición 1.22.). Entonces, si r es tal que $|x| < r < r_0 < R$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge absolutamente y uniformemente en $[-r, r]$ por el Lema de Abel. Esto prueba 1. y 2.

Si $|x_0| > R$ y $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ converge, entonces para $|x_0| > r > R$ resultaría $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ convergente en $[-r, r]$ por Lema de Abel.

Eso no puede ocurrir por la definición de R (al ser $r > R$).///

DEFINICION 10.11.

Llamaremos *radio de convergencia* de la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ al R dado por el Teorema 10.10. (R puede ser un número real $\geqslant 0$ o ser $+\infty$).

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

El cálculo efectivo de R se facilita muchas veces por el siguiente resultado:

PROPOSICION 10.12.

Sea $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ una serie de potencias.

● 1. Si existe $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ y es distinto de cero, entonces $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, entonces la serie converge para todo x (se dice en ese caso que el radio de convergencia es infinito).

● 1. Si existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, entonces $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Si ese límite es cero, el radio de convergencia es ∞.

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración

▲ 1. Sea $\ell = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Es:

$$\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^k|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| \to \ell . |x|$$

Luego, por el Criterio de D'Alembert (Proposición 4.6.), la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ converge absolutamente cuando $\ell . |x| < 1$, o sea $|x| < \frac{1}{\ell}$, y no converge absolutamente para $\ell . |x| > 1$, o sea $|x| > \frac{1}{\ell}$. Por el Teorema 10.10., resulta $R = 1/\ell$. Si $\ell = 0$, entonces $\ell . |x| < 1$ y por lo tanto la serie converge cualquiera sea x.

▲ 2. Análoga usando el Criterio de Cauchy (Proposición 4.7.).

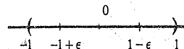
Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLO 1

Consideremos la serie de potencias:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{(o sea, } a_k = 1 \text{ para todo k)}$$

Entonces $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1} = 1 \to 1$. Luego $R = \frac{1}{1} = 1$.



Al ser $R = 1$, estamos seguros de que esta serie converge absolutamente en $(-1, 1)$ y, para cada $\epsilon > 0$, uniformemente en $[-1 + \epsilon, 1 - \epsilon]$.

Además *no* converge en $(-\infty, -1)$ ni en $(1, +\infty)$.

En $x = 1$ y $x = -1$, la serie tampoco converge por el término general no tiende a cero.

EJEMPLO 2

Consideremos la serie de potencias:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$$

Aquí es $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/n+1}{1/n} = \frac{n}{n+1} \to 1$. Luego $R = \frac{1}{1} = 1$.

Tenemos las mismas conclusiones, entonces, que en el ejemplo anterior, salvo que en $x = 1$ la serie *no* converge (pues obtenemos la serie armónica; en $x = -1$ converge, como se deduce del Criterio de Leibniz (Proposición 4.8.)).

EJEMPLO 3

Consideremos la serie de potencias:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} x^k$$

Entonces:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = \frac{1}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \to 1$$

Luego $R = \frac{1}{1} = 1$.

Obtenemos, entonces, las mismas conclusiones que en el Ejemplo 1, salvo que esta serie converge tanto para $x = 1$ como para $x = -1$ (para $x = 1$ obtenemos la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ que converge por Ejercicio 2 de 4.2.

Para $x = -1$ obtenemos la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ que converge absolutamente).

Examinemos ahora la derivabilidad de una serie de potencias:

PROPOSICION 10.13.

Sea $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Sea, para cada $x \in (-R, R)$:

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Entonces se verifica:

★ 1. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ converge en $(-R, R)$

★ 2. S es derivable en $(-R, R)$

★ 3. Para $x \in (-R, R)$ es $S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k x^k)'$

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Demostración

● 1. Sea $x \in (-R, R)$, es decir $0 \leq |x| < R$. Si r_0 y r son números reales tales que $|x| < r < r_0 < R$, entonces es:

$$|k a_k x^{k-1}| = k |a_k| |x|^{k-1} <$$

$$< k |a_k| r^{k-1} = \frac{k}{r} |a_k| r^k =$$

$$= \frac{k}{r} . |a_k| . \frac{r^k}{r_0^k} . r_0^k =$$

$$= |a_k r_0^k| \frac{1}{r} . k \left(\frac{r}{r_0}\right)^k \qquad (6)$$

Como $a_k r_0^k \to 0$ (por ser $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r_0^k$ convergente), entonces $a_k r_0^k . \frac{1}{r} \to 0$, luego existe $M > 0$ tal que

$$|a_k r_0^k \frac{1}{r}| \leq M$$

Entonces, por (6):

$$|k a_k x^{k-1}| < Mk \left(\frac{r}{r_0}\right)^k$$

Pero la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k . M \left(\frac{r}{r_0}\right)^k$ converge (por el Criterio de D'Alembert (Proposición 4.6.) y por ser $\frac{r}{r_0} < 1$).

Luego, por el criterio de comparación (Proposición 4.3.), la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ converge absolutamente, luego converge.

● 2,3. Si R' es el radio de convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$, entonces lo que acabamos de probar muestra que $R' \geq R$ (en realidad es $R' = R$; ver Ejercicio 2). Entonces basta aplicar primero la Proposición 10.7. para ver que S es continua en $(-R, R)$ y luego el ejercicio del parágrafo anterior para ver que S es derivable y que su derivada se obtiene derivando término a término la serie original.///

EJERCICIOS

1.

Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

★ a) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$;

★ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$;

★ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$;

★ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$;

★ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2n} x^n$;

★ f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2 + 2^n}{n^3 + 3^n} x^n$.

En todos los casos, estudiar la convergencia en $x = \pm R$.

2.

Probar que el radio de convergencia R' de $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ es igual al radio de convergencia R de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. (SUGERENCIA: por Proposición 10.13. a), es $R' \geq R$. Para probar $R' \leq R$, usar que $a_n x^n \leq x . n a_n x^{n-1}$).

3.

Probar que el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *es igual al de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Si* $S_1(x)$ *es la suma de la primera serie y* $S_2(x)$ *la de la segunda, probar que*

$$\int S_2(x)\, dx = S_1(x) + C$$

10.5.

LA FUNCION DE WEIERSTRASS

En este parágrafo veremos un ejemplo de una función f que sea continua en todos los números reales pero no derivable en ninguno de ellos. El primer ejemplo de una tal función fue dado por el matemático alemán K. Weierstrass (1815-1897), y el que vamos a dar aquí es una modificación que conserva la misma idea.

Previamente, daremos un lema de caracter auxiliar.

LEMA 10.14.

****

Sea $f: (a, b) \to R$ derivable en $x_0 \in (a, b)$ y

sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones que verifican:

- 1. $a_n \leq x_0 \leq b_n$ para todo $n \in N$
- 2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$

Entonces es:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x_0)$$

****

Demostración

Supongamos primero que existe $n_0 \in N$ tal que $a_n < x$ para $n \geq n_0$. En ese caso escribimos:

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} - f'(x) =$$

$$= \frac{b_n - x}{b_n - a_n} \left[\frac{f(b_n) - f(x)}{b_n - x} - f'(x) \right] +$$

$$+ \frac{x - a_n}{b_n - a_n} \left[\frac{f(a_n) - f(x)}{a_n - x} - f'(x) \right].$$

igualdad cuya verificación dejamos a cargo del lector.

Claramente, los dos corchetes tienden a cero cuando $n \to \infty$. Como $\frac{b_n - x}{b_n - a_n}$ está acotado por 1 y $\frac{x - a_n}{b_n - a_n}$ también, entonces el segundo miembro tiende a cero, de donde se deduce el lema.

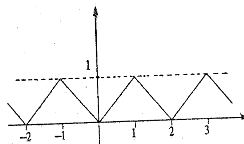
Si no existe $n_0 \in N$ tal que $a_n < x$ para $n \geq n_0$, entonces hay una subsucesión $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(a_n)_{n\geq 1}$, formada por los $a_n = x$. Entonces:

$$\frac{f(b_{n_k}) - f(a_{n_k})}{b_{n_k} - a_{n_k}} = \frac{f(b_{n_k}) - f(x)}{b_{n_k} - x} \to f'(x) \quad (k \to \infty)$$

Combinando este resultado con el inmediatamente previo, resulta el lema en el caso general.///

Construyamos ahora la función prometida. Definimos $g: R \to R$ de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



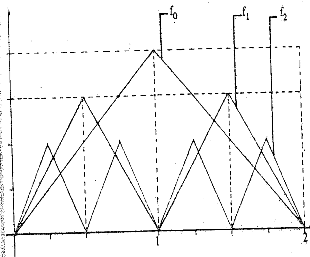
y $g(x+2) = g(x)$ para todo $x \in R$.

Esta función es claramente continua en R y no derivable en los enteros.

Sea ahora $f_n: R \to R$ definida por:

$$f_n(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^n g(4^n . x)$$

Indicamos, en $[0, 2]$, algunas de estas funciones:



La función f_n es continua en R y no derivable en todo número de la forma $p/4m$ para $p \in Z$, $m \in N$. Además $0 \leq f_n(x) \leq (\frac{3}{4})^n$ para todo x.

De esta manera, cada función va agregando puntos "angulosos", aunque la oscilación es cada vez más pequeña.

Definimos ahora $f: R \to R$ por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Siendo $0 \leq f_n(x) \leq (\frac{3}{4})^n$ para todo $x \in R$, entonces por la Proposición 10.8., la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en R. Como cada f_n es continua en R, se deduce que f es continua en todo R (por Proposición 10.7.).

Para ver que f no es derivable en un punto cualquiera x, procedemos de la siguiente manera. Sean, para cada $m \in Z$:

$$a_m = \frac{[4^m . x]}{4^n}, \qquad b_m = \frac{[4^m . x] + 1}{4^m}$$

en donde $[c]$ significa la parte entera de c.

Es claro que $a_m \leq x < b_m$ por definición de parte entera; además es $b_m - a_m = \frac{1}{4^m} \to 0$ $(m \to \infty)$. Luego estamos en las condiciones del lema 10.14.; por lo tanto, *si* f *fuese derivable en* x, debería ser:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m} = f'(x)$$

Vamos a ver que $\frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m}$ no tiene límite finito.

Para ello, notemos que es:

$$|g(4^n b_m) - g(4^n a_m)| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n > m \\ 4^{n-m} & \text{si} \quad n \leq m \end{cases} \qquad (7)$$

En efecto, es $4^n b_m - 4^n a_m = 4^{n-m}$; si $n > m$, entonces 4^{n-m} es un número par. Como $g(x) = g(x+2)$ para todo $x \in R$, entonces:

$$g(x) = g(x+2) = g(x+2+2) =$$
$$= g(x+2+2+2) = \ldots = g(x+2k)$$

cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia:

$$g(4^n b_m) - g(4^n a_m) = 0 \qquad (n > m)$$

Si $n = m$, entonces $4^n a_n = [4^n . x] = n_0$ y $4^n b_n = [4^n . x] + 1 = n_0 + 1$.

Luego los números $4^n b_n$ y $4^n a_n$ son enteros consecutivos, con lo cual $g(4^n b_n) - g(4^n a_n) = 1 = 4^0 = 4^{n-m}$ (en el caso $n = m$).

Por último, si $n < m$, entonces no hay ningún entero entre $4^n b_m$ y $4^n a_m$; en efecto, sea $p = m - n$. Si hubiera $h \in \mathbb{Z}$ tal que $4^n a_m < h < 4^n b_m$, entonces sería $4^{n-m}[4^m x] < h < 4^{n-m}([4^m x] + 1)$, es decir:

$$4^{-p}[4^m x] < h < 4^{-p}([4^m x] + 1)$$

luego:

$$[4^m . x] < 4^p h < [4^m . x] + 1,$$

y esto no puede ser, el primer y tercer miembro son enteros consecutivos, no puede haber un entero entre ellos (y $4^p h$ es un entero). Entonces $4^n b_m$ y $4^n a_m$ están en un intervalo $(q, q+1)$ con $q \in \mathbb{Z}$. Luego, como g es de la forma $g(x) = \pm x + k$ en esos intervalos:

$$|g(4^n b_m) - g(4^n a_m)| =$$

$$= |(\pm 4^n b_m + k) - (\pm 4^n a_m + k)| =$$

$$= 4^n b_m - 4^n a_m =$$

$$= 4^{n-m}$$

Habiendo probado (7), calculamos:

$$f(b_m) - f(a_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n g(4^n . b_m) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n g(4^n . a_m) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (g(4^n b_m) - g(4^n a_m)) = \qquad \text{(por (7))}$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n (g(4^n b_m) - g(4^n a_m)) =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^m + \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n (g(4^n b_m) - g(4^n a_m))$$

Tomando módulos, resulta:

$$|f(b_m) - f(a_m)| \geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^m - \left|\sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^m (g(4^n b_m) - g(4^n a_m))\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^m - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n |g(4^n b_m) - g(4^n a_m)| =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^m - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n 4^{n-m} =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^m - \frac{1}{4^m} \sum_{n=0}^{m-1} 3^n =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^m - \frac{1}{4^m} \frac{3^m - 1}{3 - 1} =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^m - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^m + \frac{1}{2 . 4^m} > \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^m,$$

con lo cual:

$$\left|\frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m}\right| = \frac{|f(b_m) - f(a_m)|}{|b_m - a_m|} > \frac{\frac{1}{2} : \left(\frac{3}{4}\right)^m}{4^{-m}} =$$

$$= \frac{1}{2} 3^m \to +\infty \qquad (m \to +\infty)$$

Al no existir $\lim\limits_{m \to \infty} \dfrac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m}$, entonces f no puede ser derivable en x por el Lema 10.14. Como esto vale para todo $x \in \mathbb{R}$, se deduce lo afirmado.

10.6.

SERIES DE TAYLOR

Consideremos una serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ y supongamos que su radio de convergencia R es mayor que cero. Sea $f : (-R, R) \to \mathbb{C}$ la función definida por:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad (8)$$

Claramente es $f(0) = a_0$.

Según sabemos, la función f es derivable en $(-R, R)$ y su derivada es:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

Haciendo $x = 0$ resulta:

$$f'(0) = a_1$$

Repitiendo para f' el razonamiento hecho para f, resulta que f' es derivable en $(-R, R)$ (o sea, f tiene derivada segunda f'' en $(-R, R)$) y su derivada es:

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} =$$

$$= 2a_2 + 6a_3 x + 12 a_4 x^2 + \ldots$$

Nuevamente hacemos $x = 0$ y resulta:

$$f''(0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

Es fácil, entonces, ver inductivamente que f tiene derivada n-sima, que indicaremos $f^{(n)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y que ésta está dada por:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)(k-2) \ldots (k-n+1) a_k x^{k-n}$$

Calculando en $x = 0$:

$$f^{(n)}(0) = n!\, a_n \qquad \text{(interpretando } f^{(0)} \text{ como } f)$$

o sea:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Como esto vale para todo $n \geqslant 0$, entonces por (8) será, para $x \in (-R, R)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k =$$

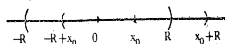
$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots \qquad (9)$$

Ahora, para la misma serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, con radio de convergencia R, y para un cierto $x_0 \in \mathbb{R}$, definimos $g: (-R + x_0, R + x_0) \to \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n =$$

$$= a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots$$

(notar que g está definida, pues al estar x entre $-R + x_0$ y $R + x_0$, entonces $x - x_0$ está entre $-R$ y R y la serie converge).



Repitiendo los razonamientos hechos para f, se ve que g tiene derivada n-sima en $(-R + x_0, R + x_0)$ para todo $n \in N$ y que ésta vale:

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)(k-2)\ldots$$

$$\ldots (k-n+1)\, a_k (x-x_0)^{k-n} =$$

$$= n!\, a_n + (n+1)\, n\, (n-1) \ldots$$

$$\ldots 3 . 2\, a_{n+1} (x-x_0) + \ldots$$

y entonces, calculando en $x = x_0$:

$$g^{(n)}(x_0) = n!\, a_n,$$

o sea:

$$a_n = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Entonces tenemos la siguiente expresión de g:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k =$$

$$= g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) +$$

$$+ \frac{g''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{g^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \ldots$$

Resumamos lo que hemos probado:

PROPOSICION 10.15.

Sea $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ una serie de potencias de radio de convergencia $R > 0$. Si x_0 es un número real cualquiera y si $f: (-R + x_0, R + x_0) \to \mathbb{R}$ está definida por:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \qquad (10)$$

entonces f tiene derivada n-sima para todo $n \in N$ en $(-R + x_0, R + x_0)$.

Además es $f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n$, de donde:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \qquad (11)$$

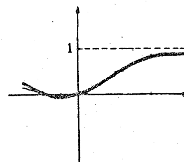


Observemos que la situación que tenemos hasta ahora es la siguiente: *partiendo* de una serie de potencias de radio de convergencia no nulo, *definimos* una función f como la suma de la serie (10) y probamos que f es igual a una serie de potencias en la que los coeficientes vienen dados por las derivadas sucesivas de f en el punto que consideramos (divididas por el factorial).

Invertimos ahora la situación y nos planteamos la pregunta: *partiendo* de una función f indefinidamente derivable, si *definimos* una serie de potencias asociada a f (la *serie de Taylor* de f) como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ ¿será $f(x)$ igual a su serie de Taylor para x en algún intervalo alrededor de x_0?

En general, la respuesta es *no*. Por ejemplo, consideremos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$



Se puede verificar (ver Ejercicio 8), que esta función es indefinidamente derivable en todo $\mathbb{R}$ y que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$. Entonces, si formamos la serie de Taylor de f para $x_0 = 0$, resulta:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$$

Luego no puede ser $f(x)$ igual a su serie de Taylor para x en ningún intervalo alrededor de 0. Pues si fuese así, f sería cero en ese intervalo, y ello no ocurre, f es distinta de cero en cualquier $x > 0$.

De todas maneras, hay una gran variedad de funciones para las cuales la respuesta es afirmativa. El resultado clave para saber para qué funciones así sucede, es el siguiente.

TEOREMA 10.16.
(FORMULA DE TAYLOR)

Sea f una función de (a, b) en $\mathbb{R}$ que tiene hasta la derivada $(n+1)$-sima en (a, b) y supongamos que $f^{(n+1)}$ es continua en (a, b). Entonces, dado $x_0 \in (a, b)$, para todo $x \in (a, b)$ existe un número ξ entre x_0 y x (si $x_0 < x$) o entre x y x_0 (si $x < x_0$) tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_{n+1}(x) \qquad (12)$$

donde:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Además es:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n+1}(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Demostración

Sea R_{n+1} definido por (12), es decir:

$$R_{n+1}(x) = f(x) -$$

$$-\left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)$$

Es sencillo el verificar que

$$R_{n+1}(x_0) = R'_{n+1}(x_0) = R''_{n+1}(x_0) = \ldots =$$

$$= R^{(n)}_{n+1}(x_0) = 0$$

Por lo tanto será:

$$\frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_{n+1}(x) - R_{n+1}(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - (x_0-x_0)^{n+1}} = \text{(por Teorema de Cauchy 7. .)}$$

$$= \frac{R'_{n+1}(x_1)}{(n+1)(x_1-x_0)^n} = \quad \text{para algún } x_1 \text{ entre } x_0 \text{ y } x$$

$$= \frac{R'_{n+1}(x_1) - R'_{n+1}(x_0)}{(n+1)(x_1-x_0)^n - (n+1)(x_0-x_0)^n} = \text{(por 7. .)}$$

$$= \frac{R''_{n+1}(x_2)}{(n+1)\,n\,(x_2-x_0)^{n-1}} = \quad \text{para algún } x_2 \text{ entre } x_0 \text{ y } x_1$$

$$= \frac{R''_{n+1}(x_2) - R''_{n+1}(x_0)}{(n+1)\,n\,(x_2-x_0)^{n-1} - (n+1)\,n\,(x_0-x_0)^{n-1}} = \ldots =$$

$$= \frac{R^{(n+1)}_{n+1}(x_{n+1})}{(n+1)\,n\,(n-1)\ldots 2.1} \quad \text{para algún } x_{n+1} \text{ entre } x_n \text{ y } x_1$$

Llamando $\xi = x_{n+1}$, resulta que ξ está entre x_0 y x, y además:

$$\frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R^{(n+1)}_{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

Como $R^{(n+1)}_{n+1}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$ (esto se deduce de la definición de R_{n+1}), entonces:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

que es lo que queríamos demostrar. Por último:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^n} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0) =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x_0-x_0) = 0. ///$$

Deducimos del Teorema 10.16. que la condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ sea igual a su serie de Taylor en x_0 es que $R_{n+1}(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Y esto sucede, por ejemplo, cuando todas las derivadas están acotadas (en un cierto intervalo alrededor de x_0) por un mismo número. Pues si existe M tal que, para $|x - x_0| < \delta$:

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M \qquad \text{para todo } n \in N$$

entonces:

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leqslant \frac{M\delta^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLO 1

Sea $f: R \to R$ la función exponencial:

$$f(x) = e^x$$

Como $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo $n \in N$, entonces $f^{(n)}(0) = 1$. Luego la serie de Taylor de f en $x_0 = 0$ (llamada *serie de Mac Laurin* de f) es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

La expresión de R_{n+1} es:

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} \leqslant \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Entonces $R_{n+1}(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ (recordar que x es fijo; para *cada* x es cierto que $R_{n+1}(x) \to 0$); como esto sucede *para todo* $x \in R$, entonces f es igual a su serie de Taylor para todo $x \in R$.

En otras palabras:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad (x \in R)$$

Si en lugar de tomar $x_0 = 0$ hubiésemos tomado cualquier otro, resultaría también, para todo $x \in R$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!}(x-x_0)^n$$

EJEMPLO 2

Sea $f: R \to R$ la función seno:

$$f(x) = \text{sen}\, x$$

La serie de Mac-Laurin de f se obtiene en forma sencilla. Es:

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\text{sen}\, x \Rightarrow f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$$
$$f^{(4)}(x) = \text{sen}\, x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

Aquí todo vuelve a empezar. Luego la serie de Mac-Laurin del seno es:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Para estudiar el comportamiento de $R_{n+1}(x)$ cuando $n \to \infty$, es conveniente tener una expresión de la derivada n-sima del seno. El lector puede verificar la siguiente:

$$\text{sen}^{(n)}(x) = \text{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Entonces es:

$$|R_{n+1}(x)| = \left|\frac{\text{sen}(\xi + (n+1)\pi/2)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \leqslant$$

(pues $|\text{sen}| \leqslant 1$)

$$\leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

Luego, también en este caso, f es igual a su serie de Taylor para todo $x \in R$.

Es decir, para todo $x \in R$:

$$\text{sen}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Parecidas acotaciones nos dan la igualdad:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x_0 + n\frac{\pi}{2})}{n!} x^n$$

EJEMPLO 3

A veces no es necesario recurrir al Teorema 10.16. para obtener el desarrollo de Taylor de una función. Por ejemplo, sea $f: (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Sabemos, por la suma de una progresión geométrica (ver parágrafo 4. .) que:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n =$$

$$= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Luego:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Si $-1 < x < 1$, entonces $x^{n+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$
Luego para $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Si cambiamos x por $-x$, obtenemos el siguiente desarrollo de Mac-Laurin de la función $g(x) = \frac{1}{1+x}$:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad (|x| < 1)$$

Si cambiamos ahora x por x^2, obtenemos el siguiente desarrollo de Mac-Laurin de la función $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad (|x| < 1)$$

El desarrollo de Taylor se puede usar para hacer cálculos aproximados. Por ejemplo, planteamos el siguiente problema: calcular e con error menor que $0{,}01$.

Para ello recordamos que, por el ejemplo 1, es para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

o sea, tomando $x = 1$:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Si calculamos esa serie nada más que hasta el término n-simo, el error cometido al considerar e igual a eso es, por el ejemplo 1:

$$R_{n+1}(1) = \frac{e^{\&}}{(n+1)!} 1^{n+1} < \frac{e}{(n+1)!} <$$

$$< \frac{3}{(n+1)!}$$

Para que ese error sea menor que $0{,}01$, basta tomar $n = 5$. Entonces con error menor que $0{,}01$:

$$e \cong 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} =$$

$$= 2 + \frac{60 + 20 + 5 + 1}{120} = 2 + \frac{86}{120} =$$

$$= 2 + 0{,}716 = 2{,}716$$

EJERCICIOS

1.

Hallar una fórmula para la derivada n-sima de las siguientes funciones y probarla por inducción:

- ★ *a)* $f(x) = x e^x$;
- ★ *b)* $f(x) = \cos x$;
- ★ *c)* $f(x) = \operatorname{sen} a x$;
- ★ *d)* $f(x) = \ln(1+x)$;
- ★ *e)* $f(x) = \frac{1}{x}$;
- ★ *f)* $f(x) = \frac{1}{a+bx}$;
- ★ *g)* $f(x) = \sqrt{x}$;
- ★ *h)* $f(x) = x^2 \ln x$

2.

Desarrollar el polinomio $P = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ en potencias de $x - 1$ y en potencias de $x - 2$.

3.

Hallar las fórmulas de Mac-Laurin de las siguientes funciones, indicando el término complementario R_{n+1}:

- a) $f(x) = \cos x$;
- b) $f(x) = \ln(1+x)$;
- c) $f(x) = \sqrt{1+x}$;
- d) $f(x) = \operatorname{sh} x$;
- e) $f(x) = \operatorname{ch} x$.

4.

Probar que, para $x > -1$, es:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + R,$$

donde $R = \binom{\alpha}{n+1}(1+\&)^{\alpha-(n+1)} \cdot x^{n+1}$. (Es $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$).

5.

Hallar el desarrollo en serie de Mac-Laurin de $\sqrt{1+x}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *(usar ejercicio 4).*

6.

Usar el desarrollo en serie de Mac Laurin de $\frac{1}{1+x^2}$ para obtener el de $\operatorname{arc\,tg} x$.

7.

Calcular $\frac{\pi}{4}$ con error menor que $0{,}1$ (usar el ejercicio anterior con $x = 1$).

8.

Calcular:

♦ *a)* sen $\frac{\pi}{4}$ *con error menor que* 0,01

♦ *b)* $\sqrt{2}$ *con error menor que* 0,001

♦ *c)* ln 10 *con error menor que* 0,01.

9.

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

⋆ a) Probar que $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^n} = 0$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

⋆ b) Probar que $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{e^{-1/x}}{x^k}$ para ciertos $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (Inducción).

⋆ c) Deducir que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

10.

Probar, en las condiciones del Teorema 10.16., la *expresión integral del término complementario:*

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n f^{(n+1)}(x-t)\, dt$$

(SUGERENCIA: inducción. Para $n = 1$ es trivial; para el paso inductivo, integrar por partes).

11.

Calcular los siguientes límites, usando desarrollos en serie de Taylor:

• *a)* $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$;

• *b)* $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

• *c)* $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}{x^3}$;

• *d)* $\lim_{x \to 0} \frac{1 + x - e^x}{x^3}$;

• *e)* $\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^x - \operatorname{sen} x}{\ln(1+x)}$.

INDICE